Soluciones
Prueba de Entrenamiento 1
25 de Mayo de 2019

1. Determine el valor de la expresión: $\dfrac{3+7+11+15+19+23+27+...+95+99}{5+9+13+17+21+25+29+...+97+101}$

Solución:

Sea S_N la suma del numerador y S_D la suma del denominador.

Escribamos la suma del numerador dos veces de la siguiente forma y luego sumemos término a término:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & + & 7 & + & 11 & + & ... & + & 99 \\ 99 & + & 95 & + & 91 & + & ... & + & 3 \\ \hline 102 & + & 102 & + & 102 & + & ... & + & 102 \end{array}$$

Notemos que al realizar la suma entre la primera y la segunda fila tendremos un total de 102 n veces, en donde n será el número de términos que tiene la suma original.

Luego, tenemos que cada término de la suma aumenta en 4, esto quiere decir que si al último término le restamos el primero y al resultado de esto lo dividimos en 4 tendremos el total de veces menos 1 que aparecerá el numero 102, o sea, el valor de $n-1$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 2S_N &= 102n \\ 2S_N &= 102 \cdot \left(\frac{99-3}{4}+1\right) \\ S_N &= 51 \cdot (24+1) \\ S_N &= 51 \cdot 25 \end{aligned}$$

Ahora hagamos lo mismo con la suma del denominador:

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & + & 9 & + & 13 & + & .... & + & 101 \\ 101 & + & 97 & + & 93 & + & .... & + & 5 \\ \hline 106 & + & 106 & + & 106 & + & .... & + & 106 \end{array}$$

Notemos que la cantidad de resultados 106 es igual a la cantidad n.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 2S_D &= 106n \\ S_D &= 53 \cdot 25 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $S_N = 51 \cdot 25$ y $S_D = 53 \cdot 25$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{3+7+11+15+19+23+27+...+95+99}{5+9+13+17+21+25+29+...+97+101} &= \frac{S_N}{S_D} \\ &= \frac{51 \cdot 25}{53 \cdot 25} \\ &= \frac{51}{53} \end{aligned}$$

2. Berta la canguro salta una vez hacia la izquierda luego de saltar tres veces hacia la derecha. Ella siempre salta sobre una misma línea, un metro cada vez. ¿A cuántos metros de distancia quedará ubicada Berta desde el punto inicial después de 2019 saltos?

   Solución:

   Cada 4 saltos Berta se mueve 3 metros hacia la derecha y 1 hacia la izquierda, por lo tanto, cada circuito de 4 saltos Berta se mueve 2 metros hacia la derecha.

   Veamos cuántos circuitos se realizan en 2019 saltos:

   $2019 : 4 = 504$ (y sobran 3 saltos)

   En 504 circuitos avanzará $504 \cdot 2$ metros hacia la derecha. Además, da 3 saltos adicionales, como sólo salta tres veces tendrá que saltar 3 veces a la derecha.

   Por lo tanto, la canguro se encontrará a $1008 + 3 = 1111$ metros hacia la derecha del punto inicial.

3. Una pirámide tiene 2019 caras. ¿Cuántas aristas tiene?

   Solución:

   Si tiene 2019 caras en total quiere decir que tendrá 2018 caras laterales y 1 cara basal de 2018 lados.

   Note que por cada vértice de la cara basal hay una arista lateral en la pirámide, por lo que se tienen 2018 aristas laterales.

   Finalmente se tienen $2018 + 2018 = 4036$ aristas.

4. Sean ab, bc, cd y da números de dos cifras tales que $ab + bc + cd + da = 154$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c + d$?

   Solución:

   Notemos que todo número de dos cifras xy puede expresarse como $10x + y$.

   Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}(10a+b)+(10b+c)+(10c+d)+(10d+a) &= 154\\ 11a+11b+11c+11d &= 154\\ 11(a+b+c+d) &= 154\\ (a+b+c+d) &= 14\end{aligned}$$

5. En la multiplicación:

$$5^5 \times 5^5 \times ... \times 5^5 \quad = \quad 5^{5^5}$$

   el número 5^5 se multiplicó por sí mismo n veces para obtener 5^{5^5} ¿Cuál es el valor del número n?

   Solución:

$$\begin{aligned}5^5 \times 5^5 \times ... \times 5^5 &= 5^{5^5}\\ 5^5 \times 5^5 \times ... \times 5^5 &= 5^{5\times 5^4}\end{aligned}$$

   Por lo que 5^5 deberá multiplicarse por sí mismo 5^4 veces.

6. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener sumando un máximo de seis 3 y tres 5?.

Solución:

Notemos que es posible sumar entre cero y seis veces 3 y entre cero y tres veces 5 por lo que la cantidad de total de combinaciones es $7 \cdot 4 = 28$

A esto debemos descontar la opción en la que se usa cero veces ambos números, quedando 27 combinaciones.

Además, note que sumar cinco veces 3 da el mismo resultado que sumar tres veces 5, por lo que debemos descontar una combinación por cada vez que usemos cinco o más veces 3 y ninguna vez 5 (pues el resultado es el mismo que usando tres veces 5 y solo podemos usar 5 tres veces). Esto ocurre dos veces ($3+3+3+3+3$ y $3+3+3+3+3+3$), por lo que el total de resultados distintos será $27-2=25$.

7. Daniel escribió números enteros del 1 al 8 (cada uno exactamente una vez) en las celdas de la tabla de la figura. Las cuatro sumas de números en las líneas superior e inferior, columnas izquierda y derecha resultaron ser iguales. ¿Cuál es el valor máximo posible de la suma de números en las cuatro celdas de la esquina de la tabla?

a	b	c
d	•	e
f	g	h

Solución:

Se tiene a+b+c+d+e+f+g+h=36.
Podemos notar que las cuatro sumas son:

(a) a+b+c. (b) a+d+f. (c) c+e+h. (d) f+g+h.

Sumando las cuatro sumas: $2a+b+2c+d+e+2f+g+2h = 36+a+c+f+h$.

Notemos que si $x = 36+a+b+c+d$, el mínimo valor posible de este será cuando $a+c+f+h = 1+2+3+4 = 10$, mientras que el máximo será cuando $a+c+f+h = 8+7+6+5 = 26$. Sin embargo, como la suma debe ser múltiplo de 4 el mínimo valor posible de x será cuando $a+c+f+h = 12$ y el máximo valor posible será cuando $a+c+f+h = 24$. Con esto podemos formar las tablas:

- a+c+f+h=12

1	8	3
5	•	7
6	4	2

- a+c+f+h=16

1	4	8
7	•	3
5	6	2

- a+c+f+h=20

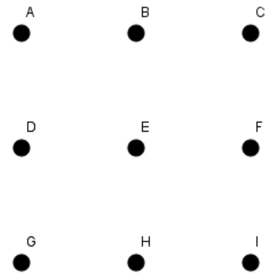
7	3	4
6	•	2
1	5	8

- a+c+f+h=24

3	5	7
4	•	2
8	1	6

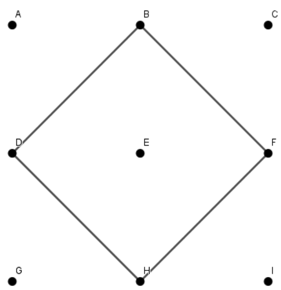
Luego, como la suma debe ser lo mayor posible, la suma sera 24.

8. Un tablero de 3×3 tiene clavos separados a una unidad uno de otro, como se muestra en la figura. ¿Cuántos triángulos distintos pueden formarse con al menos un lado de longitud $\sqrt{2}$ usando tres clavos distintos como vértices?

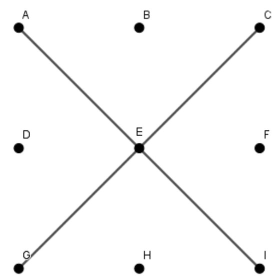


Solución:

Si tenemos los puntos A, B , C, D , E , F ,G ,H , I, J podemos notar que cualquier triángulo formado de lado $\sqrt{2}$ terminara de una de las siguientes formas:



1)



2)

Donde cada línea será el lado del triángulo cuya medida es $\sqrt{2}$.

Debido a lo anterior y teniendo en cuenta que los vértices usados para completar este lado pueden unirse con cualquier otro vértice para dar origen a un triángulo, podemos darnos cuenta que al tener en el primer caso un total de 7 vértices libres y en el segundo caso un total de 6 (debido a que no se puede formar un triángulo con tres puntos colineales) se tendrán un total de $4 \cdot 7 = 28$ triángulos en la figura 1 y $4 \cdot 6 = 24$ triángulos en la figura 2 haciendo un total de $28 + 24 = 52$ triángulos.

Sin embargo existirán triángulos donde se usaran dos líneas de lado $\sqrt{2}$ y al tener 8 de estas líneas tenemos que descontar 8 triángulos a nuestro total teniendo finalmente un total de $52 - 8 = 44$ triángulos

* Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfacen que para todo x, y enteros se cumple

$$f((x+y)^2) = (f(x) - f(y))^2$$

Solución:

Con $x = y = 0$ se deduce $f(0) = 0$.

Con $y = -x$ se deduce $0 = f(0^2) = (f(x) - f(-x))^2$ así que $f(-x) = f(x)$.

Con $y = 0$ se deduce $f(x^2) = (f(x) - 0)^2 = f(x)^2$.

Con $x = y$ se deduce $f(4x^2) = (f(x) - f(x))^2 = 0$.

Por los dos resultados anteriores $f(2x)^2 = f((2x)^2) = f(4x^2) = 0$ así que $f(2x) = 0$. Por lo tanto f se anula en los números pares.

Con $x = 2n + 1$, $y = 1$ se deduce $0 = f((2n + 2)^2) = (f(2n + 1) - f(1))^2$ y por lo tanto $f(2n + 1) = f(1)$. Así que f es constante en los impares y solo basta calcular $f(1)$.

Se tiene $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$, así que $f(1) = 0$ o bien $f(1) = 1$. Se deduce que las únicas dos f posibles son la constante 0 y la f que vale 0 en los pares y 1 en los impares.