OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Sociedad de Matemática de Chile

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática

NIVEL MENOR
Primera Parte

Problema 1. Determine cuál de los siguientes números es mayor,

$$10^{10^{10^{10}}}, \qquad (10^{10})^{(10^{10})}.$$

Solución
Usaremos el hecho siguiente: si $m > n$ entonces $10^m > 10^n$.

Se tiene que $(10^{10})^{(10^{10})} = 10^{10 \cdot 10^{10}} = 10^{10^{11}}$. Luego basta determinar cuál de los dos nmeros $10^{10^{10}}$, 10^{11} es mayor. Nuevamente, esto es lo mismo que determinar cuál es mayor de entre los números 10^{10}, 11. Como el primero de estos es evidentemente mayor, el primer número es mayor que el segundo en nuestro problema.

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática

NIVEL MENOR
Primera Parte

Problema 2. Los números enteros a, b satisfacen la siguiente identidad:

$$2a^2 + a = 3b^2 + b\,.$$

Pruebe que los números $a-b$, $2a+2b+1$ y $3a+3b+1$ son cuadrados perfectos.

Solución

(1) $2a^2+a = 3b^2+b \iff 2a^2+a-2b^2-b = b^2 \iff (a-b)(2a+2b+1) = b^2$.
(2) $2a^2+a = 3b^2+b \iff 3b^2+b-3a^2-a = -a^2 \iff (a-b)(3a+3b+1) = a^2$.

De (1) y (2) se tiene que

$$(a-b)^2(2a+2b+1)(3a+3b+1) = (ab)^2$$

luego $(2a+2b+1)(3a+3b+1)$ debe ser un cuadrado perfecto. Adems

$$\begin{aligned} MCD(2a+2b+1, 3a+3b+1) &= MCD(2a+2b+1, a+b) \\ &= MCD(1, a+b) = 1, \end{aligned}$$

es decir, ambos factores son coprimos y deben ser cada uno de ellos a su vez, cuadrados perfectos. Pongamos $(2a+2b+1) = x^2$. De la igualdad

$$(a-b)x^2 = b^2$$

se tiene que $(a-b)$ tambin es un cuadrado perfecto.

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática

NIVEL MENOR
Primera Parte

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrado y M su centro. Considere el punto E sobre la recta AC tal que $|\overline{MC}| = |\overline{CE}|$. Sea S el círculo circunscrito al triángulo $\triangle EDB$. Demuestre que S pasa por el punto medio de $\overline{AM}$.

Solución

Sea $N = S \cap \overline{AC}$. Tenemos que

$$\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{CE} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{1}{2}.$$

El cuadrilátero $DNBE$ es cíclico luego

$$\angle NEB = \angle NDM \quad , \quad \angle DMN = 90 = \angle EMB.$$

Los triángulos $\Delta NDM \sim \Delta BEM$ son semejantes, luego

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{MD}} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{AM}.$$

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática

22 de Octubre 2010

NIVEL MENOR
Segunda Parte

Problema 4. Calcule la suma de todos los divisores del número 2.010.000.000.

Solución

$$2.010.000.000 = 201 \cdot 10^7 = 67 \cdot 3 \cdot 2^7 \cdot 5^7.$$

En general la suma de los divisores $\sigma(A)$ de un número factorizado en potencias de primos $A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ se puede calcular por

$$\sigma(A) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_n + \dots + p_n^{\alpha_n}).$$

Así

$$\begin{aligned} \sigma(2.010.000.000) &= (1 + 2 + \dots + 2^7)(1 + 5 + \dots + 5^7)(1 + 3)(1 + 67) \\ &= 256 \cdot 97656 \cdot 4 \cdot 68 \\ &= 6799982592. \end{aligned}$$

NIVEL MENOR
Segunda Parte

Problema 5. Considere un rectángulo cuyos lados y diagonales son números enteros. Pruebe que el área del rectágulo es divisible por 12.

Solución
Sean a, b los lados, ponemos c la longitud de la diagonal y $A = ab$ el área del rectángulo. Por Pitágoras se tiene $c^2 = a^2 + b^2$. Se tienen varios casos por considerar:

(1) Si a, b son impares, entonces $a^2 \equiv 1(mod\ 4)$ y $b^2 \equiv 1(mod\ 4)$. Luego $c^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2(mod\ 4)$. Sin embargo, los cuadrados solo pueden ser 1 ó 0 módulo 4.
(2) Si a, b son pares entonces $A = ab$ es divisible por 4.
(3) Si a, b tienen distinta paridad, suponemos que a es par, digamos $a = 2k$. Estudiemos los cuadrados módulo 8: $b^2 \equiv 1(mod\ 8)$. Si k es imapr entonces $a^2 = (2k)^2 \equiv 4(mod\ 8)$. En este caso $c^2 \equiv 4 + 1(mod\ 8)$ lo cual es imposible pues los cuadrados módulo 8 solo pueden ser $0, 1, 4$. Solo queda la posibilidad k es par. En este caso a es divisible por 4 y luego $A = ab$ es divisible por 4.

En cualquier caso hemos probado que A es divisible por 4. Para probar que es divisible por 12 debemos mostrar que es divisible por 3. Para ello veamos que alguno de los números a, b es divisble por 3. Supongamos que ninguno de los dos es divisible por 3. Entonces debe tenerse

$$a^2 \equiv 1(mod\ 3) \quad , \quad b^2 \equiv 1(mod\ 3).$$

Luego $c^2 \equiv 2(mod\ 3)$ lo cual es imposible.

NIVEL MENOR
Segunda Parte

Problema 6. Considere una recta L en el plano y sean B_1, B_2, B_3 puntos distintos en L. Sea A un punto que no está en L. Muestre que existe P, Q en $\{B_1, B_2, B_3\}$ con $P \neq Q$ de tal modo que la distancia de A a L es mayor que la distancia de P a la recta que pasa por A y Q.

Solución
Supongamos que los puntos B_1, B_2, B_3 estn ordenados según su índice. De entre los ángulos (cuya suma es 180) $\angle B_1B_2A$ y $\angle AB_2B_3$ uno mide al menos 90. Supongamos que $\angle AB_2B_3 \geq 90$. Miremos el triángulo ΔAB_2B_3. Aseguramos que la altura h_{B_2} desde B_2 al lado AB_3 es menor que la altura h_A desde A hasta (la proyección de) la línea B_2B_3. Efectivamente, como $\angle AB_2B_3 \geq 90$, se tiene $AB_3 > B_2B_3$. Calculando el área de ΔAB_2B_3 tenemos

$$\frac{1}{2}h_A\overline{B_2B_3} = \frac{1}{2}h_{B_2}\overline{AB_3}.$$

Como $AB_3 > B_2B_3$ debe tenerse $h_A > h_{B_2}$. El caso $\angle B_1B_2A \geq 90$ se trata de manera análoga.

OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Sociedad de Matemática de Chile

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática
21 Octubre 2010

NIVEL MAYOR
Primera Parte

Problema 1. Los números enteros a, b satisfacen la siguiente identidad:

$$2a^2 + a = 3b^2 + b\,.$$

Pruebe que $a - b$, $2a + 2b + 1$ y $3a + 3b + 1$ son cuadrados perfectos.

Solución

(1) $2a^2+a = 3b^2+b \iff 2a^2+a-2b^2-b = b^2 \iff (a-b)(2a+2b+1) = b^2$.
(2) $2a^2+a = 3b^2+b \iff 3b^2+b-3a^2-a = -a^2 \iff (a-b)(3a+3b+1) = a^2$.

De (1) y (2) se tiene que

$$(a-b)^2(2a+2b+1)(3a+3b+1) = (ab)^2$$

luego $(2a+2b+1)(3a+3b+1)$ debe ser un cuadrado perfecto. Adems

$$\begin{aligned} MCD(2a+2b+1, 3a+3b+1) &= MCD(2a+2b+1, a+b) \\ &= MCD(1, a+b) = 1, \end{aligned}$$

es decir, ambos factores son coprimos y deben ser cada uno de ellos a su vez, cuadrados perfectos. Pongamos $(2a+2b+1) = x^2$. De la igualdad

$$(a-b)x^2 = b^2$$

se tiene que $(a-b)$ tambin es un cuadrado perfecto.

NIVEL MAYOR
Primera Parte

Problema 2. Determine cuál de los siguientes números es mayor,

$$10^{10^{10^{10}}}\,, \qquad (10^{10})!\ .$$

Solución

Para todo $n \geq 2$ se tiene $n! < n^n$, pues $n! = 1*2*3*\cdots*n$ y $n^n = n*n*n*\cdots*n$. De aquí podemos concluir que $(10^{10})! < (10^{10})^{(10^{10})} = 10^{10^{11}}$. Además sabemos que

$$10^{11} < 10^{10^{10}}$$

luego

$$(10^{10})! < 10^{10^{11}} < 10^{10^{10^{10}}}.$$

NIVEL MAYOR
Primera Parte

Problema 3. Los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC son tangentes a una circunferencia en los puntos X, Y, Z respectivamente. Demuestre que el centro de tal circunferencia está sobre la recta que pasa por los puntos medios de BC y AX.

Solución
Sea M el punto medio del lado BC, N el punto medio de AX. Definimos I en el segmento MN tal que IX es perpendicular a BC. El problema se reduce a mostrar que $\overline{IX}$ es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo (pues el centro de la circunferencia inscrita se haya sobre la perpendicular por X al lado BC).

Ponemos a, b, c el largo de los lados BC, CA, AB respectivamente, denotamos $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro. Es un resultado clásico que

$$BX = p - b.$$

Si ponemos h como el largo de la altura AD desde A hasta BC se tiene

$$h^2 = c^2 - BD^2 = b^2 - DC^2.$$

La última igualdad implica

$$DC^2 - BD^2 = b^2 - c^2$$

$$(DC + BD)(DC - BD) = b^2 - c^2$$

$$(DC - BD)a = b^2 - c^2.$$

Juntando esto con $BD + DC = a$ tenemos

$$BD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Esto último se pudo obtener de aplicar directamente el teorema del coseno. Calculemos DX:

$$DX = BX - BD = \frac{a + c - b}{2} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \cdots = \frac{(b - c)(p - a)}{a}.$$

Además $XM = \frac{a}{2} - BX = \frac{b-c}{2}$.

Sea E el pie de la perpendicular desde N hasta BC. Se tiene que $NE = \frac{h}{2}$. Notemos que los triángulos IXM y NEM son semejantes. Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{IX}{NE} &= \frac{IX}{\frac{h}{2}} = \frac{XM}{EM} = \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b-c}{2} + \frac{DX}{2}} \\ &= \frac{b-c}{b-c+\frac{(b-c)(p-a)}{a}} = \frac{a}{p}. \end{aligned}$$

De aquí despejamos $IX = \frac{ha}{2p} = \frac{Area}{p} = r$ el radio del círculo inscrito.

OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Sociedad de Matemática de Chile

Prueba Final

XXII Olimpíada Nacional de Matemática
22 de Octubre 2010

NIVEL MAYOR
Segunda Parte

Problema 4. Sean m, n números enteros tales que satisfacen que

$$m + n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2010}\,.$$

Encuentre el resto que se obtiene al dividir n por 5.

Solución

Por el teorema del binomio de Newton, se tiene para todo $r \in \mathbb{N}$ que

$$(1+\sqrt{2})^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} 2^{\frac{j}{2}}.$$

Los sumando correspondientes a j par dan lugar a un entero y aquellos correspondientes a j impar dan lugar a un número de la forma $n\sqrt{2}$, luego la forma propuesta se tiene. Luego siempre se tiene

$$(1+\sqrt{2})^r = a_r + b_r\sqrt{2}$$

para algún par de números enteros positivos a_r, b_r. El problema nos pide estudiar el resto módulo 5 de b_{2010}. Estudiemos la evolución de ambas sucesiones:

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{2})^{r+1} &= (1+\sqrt{2})^r(1+\sqrt{2}) \\
&= (a_r + b_r\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\
&= (a_r + 2b_r) + (a_r + b_r)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Luego las sucesiones obedecen a

$$a_1 = 1\ ,\ a_{r+1} = a_r + 2b_r,$$

$$b_1 = 1\ ,\ b_{r+1} = a_r + b_r.$$

Veamos los primeros elementos de estas sucesiones (solo nos fijaremos en sus restos módulo 5):

$$\begin{aligned}
a_2 = 3 \quad &, \quad b_2 = 2\\
a_3 = 2 \quad &, \quad b_3 = 0\\
a_4 = 2 \quad &, \quad b_4 = 2\\
a_5 = 1 \quad &, \quad b_5 = 4\\
a_6 = 4 \quad &, \quad b_6 = 0\\
a_7 = 4 \quad &, \quad b_7 = 4\\
a_8 = 2 \quad &, \quad b_8 = 3\\
a_9 = 3 \quad &, \quad b_9 = 0\\
a_{10} = 3 \quad &, \quad b_{10} = 3\\
a_{11} = 4 \quad &, \quad b_{11} = 1\\
a_{12} = 1 \quad &, \quad b_{12} = 0\\
a_{13} = 1 \quad &, \quad b_{13} = 1.
\end{aligned}$$

Como los valores se repiten para $r = 1$ y $r = 13$, los valores de a_r, b_r obedecen a un ciclo de período 12. Como $2010 = 12 * 167 + 6$, debe tenerse $b_{2010} = b_6 = 0$.

NIVEL MAYOR
Segunda Parte

Problema 5. Considere una recta L en el plano y sean B_1, B_2, B_3 puntos distintos en L. Sea A un punto que no está en L. Muestre que existe P, Q en $\{B_1, B_2, B_3\}$ con $P \neq Q$ de tal modo que la distancia de A a L es mayor que la distancia de P a la recta que pasa por A y Q.

Solución

Supongamos que los puntos B_1, B_2, B_3 estn ordenados según su índice. De entre los ángulos (cuya suma es 180) $\angle B_1B_2A$ y $\angle AB_2B_3$ uno mide al menos 90. Supongamos que $\angle AB_2B_3 \geq 90$. Miremos el triángulo ΔAB_2B_3. Aseguramos que la altura h_{B_2} desde B_2 al lado AB_3 es menor que la altura h_A desde A hasta (la proyección de) la línea B_2B_3. Efectivamente, como $\angle AB_2B_3 \geq 90$, se tiene $AB_3 > B_2B_3$. Calculando el área de ΔAB_2B_3 tenemos

$$\frac{1}{2}h_A\overline{B_2B_3} = \frac{1}{2}h_{B_2}\overline{AB_3}.$$

Como $AB_3 > B_2B_3$ debe tenerse $h_A > h_{B_2}$. El caso $\angle B_1B_2A \geq 90$ se trata de manera análoga.

NIVEL MAYOR
Segunda Parte

Problema 6. Pruebe que en el interior de un triángulo equilátero de lado a se puede poner una cantidad finita de círculos iguales que no se traslapan, de radio $r = \frac{a}{2010}$, de manera que la suma de sus áreas sea mayor que $\frac{17\sqrt{3}}{80}\,a^2$.

Solución