Prueba de selección para el equipo chileno
de la Olimpiada Matemática del Cono Sur 2010.
Miércoles 26 de mayo

Nombre

e-mail

Teléfono

Fecha de Nacimiento

Problema 1. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$. Sea P un punto sobre BC. Sean M, N los pies de las perpendiculares desde P a AB y AC respectivamente. Demuestre que el valor de la suma

$$PM + PN$$

no depende de la posición del punto P escogido.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números tal que a_j puede ser 1 ó -1, para todo $1 \leq j \leq n$. Suponga además que

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_6 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Demuestre que n es un múltiplo de 4.

Problema 3. En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demuestre que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

Problema 4. Sea P un polígono de $n \geq 3$ lados, cerrado y simple (es decir, que no se corta a si mismo), y cuyos vértices son puntos de coordenadas enteras. Además, cada par de vértices consecutivos es un par de puntos adyacentes. Muestre que el área A de P verifica

$$A \geq \frac{n}{2} - 1.$$

Encuentre además el mayor valor posible para el área A cuando $n = 12$.

Aclaración: Los puntos adyacentes a uno dado son los 8 puntos de coordenadas enteras que están a su alrededor.

Tiempo: 3 horas.