



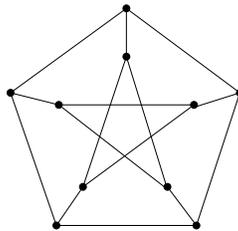
OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICAS 2011
NIVEL MENOR
Prueba Final
Jueves 15 de diciembre

Problema 1. Encuentre todas las soluciones (a, b, c) en los números naturales, verificando $1 \leq a \leq b \leq c$, de la ecuación

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Problema 2. En el interior de un cubo de lado 1, se introducen dos esferas que son tangentes exteriormente entre sí y tal que cada una es tangente a tres caras del cubo. Determine la mayor distancia a la que pueden encontrarse los centros de las esferas.

Problema 3. Considere la siguiente figura formada por 10 nodos y 15 aristas:



Pruebe que las aristas de la figura no se pueden colorear utilizando 3 colores diferentes de forma que las 3 aristas que llegan a cada nodo tengan colores distintos entre sí.

Problema 4. En cada casilla de un tablero cuadrado de 9×9 se escribe un número natural, de manera tal que la diferencia de los números ubicados en casillas adyacentes es a los más 3. Demuestre que hay al menos dos casillas que tienen el mismo número escrito en ellas.

Aclaración: dos casillas son adyacentes cuando tienen un lado en común.

Tiempo: 4 horas.



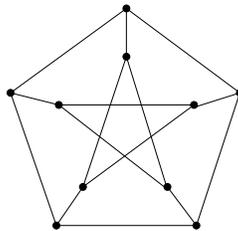
OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICAS 2011
NIVEL MAYOR
Jueves 15 de diciembre

Problema 1. Encuentre todas las soluciones (a, b, c) en los números naturales, verificando $1 \leq a \leq b \leq c$, de la ecuación

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Problema 2. Sea O el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC y sean S_A, S_B, S_C las circunferencias centradas en O que son tangentes a los lados BC, CA, AB respectivamente. Muestre que la suma del ángulo entre las dos tangentes a S_A desde A más el ángulo entre las dos tangentes a S_B desde B más el ángulo entre las dos tangentes a S_C desde C es 180 grados.

Problema 3. Considere la siguiente figura formada por 10 nodos y 15 aristas:



Pruebe que las aristas de la figura no se pueden colorear utilizando 3 colores diferentes de forma que las 3 aristas que llegan a cada nodo tengan colores distintos entre sí.

Problema 4. Se pretende confeccionar un mapa localizando 30 ciudades distintas en él. Para esto, se dispone como datos de todas las distancias entre estas ciudades (cada una de estas distancias es considerada como un “dato”).

Tres de estas ciudades ya están dispuestas en el mapa, y ellas resultan ser no colineales. ¿Cuántos datos se deben usar como mínimo para completar el mapa?

Tiempo: 4 horas.