Selectivo equipo chileno para la
Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2015

12 de Agosto de 2015

Nombre:

Fecha de Nacimiento:

Teléfono:

Obs. Por reglamento solo pueden formar parte del equipo las o los estudiantes nacidos a partir del 1 de enero de 1997.

Problema 1. Determine el número de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(g(n)) &= n + 2015, \\ g(f(n)) &= n^2 + 2015. \end{aligned}$$

Problema 2. En el pais de Muilejistán, existe una red de caminos que une todas sus ciudades y que tiene la particularidad de que para viajar entre dos cualesquiera de sus ciudades existe una única trayectoria sin retrocesos (es decir, una única trayectoria donde el viajero nunca se devuelve por el mismo camino que venía). La mayor trayectoria posible entre dos ciudades tiene un largo de 600 kilómetros. Por ejemplo, la trayectoria que vá desde la ciudad de Mlar hasta la ciudad de Nlar es de 600 kilómetros. Del mismo modo, la trayectoria que vá desde la ciudad de Klar hasta la ciudad de Glar es también de 600 kilómetros.

1. Si Jalim sale de Mlar con dirección a Nlar al mediodía y kalim Sale de Klar con dirección a Glar también al mediodía, moviendose ambos a la misma velocidad, demuestre que se encuentran en algún punto de su trayectoria.
2. Si la distancia en kms entre cada par de ciudades es un entero. Probar que la distancia, en kilómetros, de Glar a Mlar es par.

Problema 3. Pruebe que en un triángulo acutángulo escaleno, el ortocentro, el incentro y el circuncentro no son colineales.

Problema 4 Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{x+y}\right)^2.$$

Tiempo: 2.5 horas.