Problema 1. **Solución.** Consideremos la gráfica dirigida en la que cada primo del conjunto P representa un vértice, existe una arista que va de p_i a p_j si p_ip_j tiene el color p_j. Esto nos da una gráfica de un torneo (pues todos 'juegan' contra todos exactamente una vez). Diremos que p_j le gana a p_i en caso de que se tenga la arista que sale de p_i a p_j (que p_ip_j tenga el color p_j). Veamos que el torneo es transitivo, es decir, que si p_j le gana a p_i y p_i le gana a p_k, entonces p_j le gana a p_k. Supongamos que p_j le gana a p_i y p_i le gana a p_k, entonces p_ip_j es de color p_j y p_ip_k de color p_i, y supongamos que p_jp_k tiene el color p_k, consideremos las diferentes formas de 'separar' a $p_ip_jp_k$:

- $p_ip_jp_k = (p_ip_j)p_k \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_j o el color p_k (pues p_ip_j es de color p_j).
- $p_ip_jp_k = p_i(p_jp_k) \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_i o el color p_k (pues supusimos que p_jp_k es de color p_k).
- $p_ip_jp_k = (p_ip_k)p_j \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_i o el color p_j (pues p_ip_k es de color p_i).

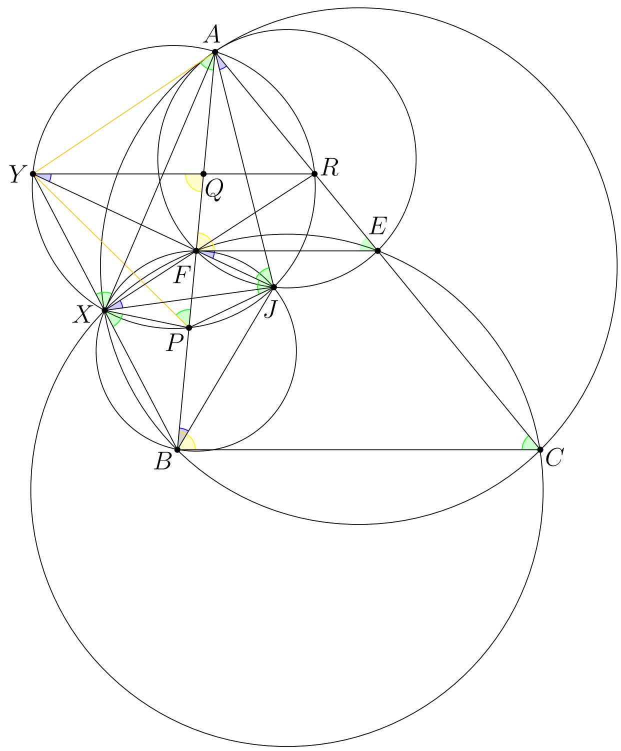
Notemos que esto nos lleva a una contradicción, pues no hay color posible que aparezca en los tres casos enlistados, y claramente $p_ip_jp_k$ debe ser de alguno de los colores p_i, p_j o p_k. Entonces p_jp_k es de color p_j, es decir, p_j le gana a p_k. Con esto hemos probado que el torneo es transitivo. Es fácil probar que en un torneo transitivo siempre hay un vértice que le gana a todos los demás, se puede hacer de manera inductiva, suponiéndolo cierto para $n-1$ vértices y viendo cómo interactúan el vértice n y el vértice ganador v del torneo inducido en los primeros $n-1$ vértices (si v le gana al n entonces v le gana a todos, y si n le gana a v, por la transitividad n le gana a todos). Con esto concluimos que existe un primo $p \in P$ tal que le gana a todos los demás primos de P, veamos que este primo cumple lo deseado.

Sea $m \in A$ tal que p divide a m, y supongamos que m tiene el color de otro primo q (claramente $q|m$). Veamos que los colores de p y de q se intersectan:

- q es de color q, y divide a pq que es de color p.
- p es de color p, y divide a m, que es de color q.

Entonces los colores de p y q se intersectan, lo que es una contradicción a las hipótesis del enunciado. Entonces m debe ser de color p, como queríamos probar.

Problema 2.



Solución:
Notemos que $\measuredangle C = \measuredangle YXA$, pero también, $\measuredangle C = \measuredangle YAP = \measuredangle YPA$, es decir que $\measuredangle YXA = \measuredangle YPA \Rightarrow YXPA$ cíclico. Llamemos al circuncìrculo de $YXPA$ ω y nombremos $J = YF \cap \omega$. $AFJE$ también es cíclico, pues $\measuredangle AJY = \measuredangle AJF = \measuredangle YXA = \measuredangle C = \measuredangle AEF$. Ahora, por potencia de punto, $YA^2 = YF \cdot YJ = YX \cdot YB \Rightarrow BXFJ$ cíclico.

$R = XF \cap AC$. $\measuredangle YXF = \measuredangle YXR = \measuredangle B$ y $\measuredangle YAR = \measuredangle YAC = 180 - \measuredangle B \Rightarrow YXRA$ es cíclico. $\measuredangle ARY = \measuredangle AXY = \measuredangle C \Rightarrow YR \parallel BC \Rightarrow Y - Q - R$ alineados.

$\measuredangle BXF = \measuredangle BXC + \measuredangle FXC = \measuredangle A + \measuredangle C = 180^\circ - \measuredangle B = \measuredangle BFE \Rightarrow FE$ es tangente a $(BXFJ) \Rightarrow \measuredangle JBQ = \measuredangle JBF = \measuredangle JYR = \measuredangle JYQ \Rightarrow BJQY$ cíclico. Por potencia de punto, $FP \cdot FA = FJ \cdot FY = FQ \cdot FB \Rightarrow FP = FQ$, lo que queríamos probar.
Nota: Si se prueba que $Y - Q - R$ alineados, puede usar potencia de punto en los cuadriláteros cíclicos $BXQR$ y $XPRA$ para llegar al resultado deseado.

Problema 3. Demostraremos que la sucesión $\{b_n\}$ no es acotada. Supongamos lo contrario y sea M una cota superior para $\{b_n\}$ (es decir $b_i < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$). Veamos primero que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen k términos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}$ que son iguales a 1 (es decir, que la sucesión $\{a_n\}$ tiene tandas arbitrariamente larga de unos). Definimos $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $P_n = a_1a_2 \cdots a_n$; así, $b_n = \dfrac{P_n}{S_n}$. Vamos a usar la siguiente observación:

Observación. Sean S, P, x, y enteros positivos con $x \geq y$. Luego $\dfrac{P_x}{S+x} \geq \dfrac{P_y}{S+y}$.

Demostración. Desarrollando queda $SP(x-y) \geq 0$, que es verdadero.

Ahora veamos el siguiente **Lema.** Para todo $k \in \mathbb{N}$, existen k términos consecutivos de la sucesión $\{a_n\}$ que son iguales a 1.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que entre cada k términos consecutivos de la sucesión hay al menos uno mayor que 1. Sea $m \geq 2$ cualquiera. Consideramos los primeros km términos de la sucesión $\{an\}$. Los partimos en m bloques consecutivos de k términos cada uno. En cada bloque hay, por hipótesis, al menos un número mayor o igual que 1. Luego, usando la observación anterior repetidas veces tenemos:

$$
\begin{aligned}
b_{mk} = \frac{P_{mk}}{S_{mk}} &= \frac{(a_1 \cdots a_k) \cdots (a_{k(m-1)+1} \cdots a_{mk})}{(a_1 + \cdots + a_k) + \cdots + (a_{k(m-1)+1} + \cdots + a_{mk})} \\
&\geq \frac{(1 \cdot 1 \cdots 2) \cdots (1 \cdot 1 \cdots 2)}{(1+1+\cdots+2) + \cdots + (1+1+\cdots+2)} = \frac{2^m}{m(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Tomando n suficientemente grande obtenemos $b_{mk} \geq \dfrac{2^m}{m(k+1)} > M$, absurdo. Esto demuestra el lema. Usando el lema terminamos de resolver el problema. La idea, que enseguida formalizaremos, es que si consideramos un bloque de $2 \cdot 10^6$ unos muy a la derecha, obtendremos entre ellos $i < j$ con $j - i \leq 10^6$ y con $\dfrac{P_i}{S_i}$ y $\dfrac{P_j}{S_j}$ enteros, y sabemos que $a_{i+1} = a_{i+2} = a_j$, entonces $P_i = P_j$.

Sea $P = P_i = P_j$. Luego $\text{mcm}(S_i, S_j)|P$, de donde $P \geq \text{mcm}(S_i, S_j)$. Pero por el siguiente lema

Lema. Sean x, y enteros positivos distintos, entonces $\text{mcm}(x, y) \geq \dfrac{xy}{|x-y|}$.

Demostración. Como $xy = \text{mcm}(x, y)\,\text{mcd}(x, y)$ tenemos $\text{mcm}(x, y) = \dfrac{xy}{\text{mcd}(x, y)} \geq \dfrac{xy}{|x-y|}$, pues $\text{mcd}(x, y)|x-y$ y por ende, $\text{mcd}(x, y) \leq |x-y|$. tenemos que $P \geq \text{mcm}(S_i, S_j) \geq \dfrac{S_iS_j}{|S_i - S_j|} \geq \dfrac{S_iS_j}{10^6} \Rightarrow \dfrac{P}{S_i} \geq \dfrac{S_j}{10^6}$, y como el bloque de unos está tan a la derecha como queramos (lo cual es consecuencia de contar con bloques de unos arbitrariamente grandes), concluimos que $b_i \geq \dfrac{S_j}{10^6} \geq \dfrac{j}{10^6}$ es tan grande como queramos, en particular mayor que M, absurdo.

A continuación hacemos formal esta idea. Por el lema anterior, existen $10^6M + 2 \cdot 10^6$ términos consecutivos de la sucesión que son iguales a 1. Sean $a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_{q+10^6M+2 \cdot 10^6}$ $(q \geq 0)$ tales términos. Por el enunciado sabemos que existen índices $i, j \in \{q + 10^6M + 1, \ldots, q + 10^6M + 2 \cdot 10^6\}$ con $1 \leq j - i \leq 10^6$ tales que b_i y b_j son enteros. Sean $S = a_1 + a_2 + \cdots a_i$ y $P = a_1a_2 \cdots a_i$; notemos que $S \geq i > 10^6$.

Tenemos que $b_i = \dfrac{P}{S}$ y como $a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots = a_j$ entonces $b_j = \dfrac{P}{S+(j-i)}$. Se sigue que P es divisible por S y por $S+(j-i)$. Luego el mínimo común múltiplo $\operatorname{mcm}(S, S+(j-i))$ de S y $S+(j-i)$ divide a P, y en particular, $P \geq \operatorname{mcm}(S, S+(j-i))$. Pero notemos que si x e y son enteros positivos distintos, usando las propiedades $xy = \operatorname{mcm}(x,y)\operatorname{mcd}(x,y)$ y $\operatorname{mcd}(x,y) \leq |x-y|$ cuando $x \neq y$ tenemos que $\operatorname{mcm}(x,y) = \dfrac{xy}{\operatorname{mcd}(x,y} \geq \dfrac{xy}{|x-y|}$. Usando este hecho resulta que

$$P \geq \operatorname{mcd}(S, S+(j-i)) \geq \frac{S(S+(j-i))}{|(S+(j-i)-S|} = \frac{S(S+(j-i))}{(j-i)},$$

luego

$$\frac{P}{S} \geq \frac{(S+(j-i))}{(j-i)} > \frac{S}{j-i} \geq \frac{S}{10^6} > \frac{10^6 M}{10^6} = M.$$

Pero $\dfrac{P}{S} = b_i$ y entonces $b_i > M$, contradiciendo que M sea cota superior para la sucesión $\{b_n\}$. Esta contradicción viene de suponer que la sucesión $\{b_n\}$ es acotada, luego hemos demostrado lo deseado.

Problema 3. Solución

La distancia entre dos vértices de V, A y B, la vamos a medir en "número de lados" del polígono que hay que recorrer para ir de A a B, por el camino más corto. La denotaremos $d(A, B)$.

Si entre los r vértices de V hay cuatro distintos, A, B, C y D, tales que $d(A, B) = d(C, D)$, entonces hay dos triángulos congruentes. En efecto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la situación es una de las que se muestran en el dibujo:

Y entonces ABC y DCB son congruentes.

Recíprocamente, es obvio que si tenemos dos triángulos que son congruentes, entonces entre los vértices de esos dos triángulos hay cuatro distintos , A, B, C y D, tales que $d(A,B) = d(C,D)$.

En definitiva, solo tenemos que demostrar que si $r(r-3) \geq n$, entonces en V hay cuatro vértices distintos, A, B, C y D, tales que $d(A,B) = d(C,D)$.

Fijado un vértice de V, A, las posibles distancias a los demás pertenecen al conjunto $\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\}$. Además, fijada una distancia d, puede haber a lo sumo dos vértices que estén a distancia d de A.

Si hay cuatro vértices de V, B_1, C_1, B_2 y C_2, tales que $d(A,B_1) = d(A,B_2)$ y $d(A,C_1) = d(A,C_2)$, entonces los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 son congruentes (intercambiando si es necesario C_1 y C_2).

A partir de ahora, supongamos que no hay dos triángulos congruentes con vértices en V y vamos a probar que $r(r-1) < n$.

Al considerar las distancias desde un $A \in V$ a los otros $r-1$ vértices de V, solo una de las $r-1$ distancias puede estar repetida. O sea que el cardinal del conjunto de distancias desde A tiene que ser mayor o igual que $r-2$.

El número de posibles distancias entre vértices de V (contando las repeticiones de distancias que comparten un vértice; pero contando solo una vez $d(A,B) = d(B,A)$) es $\frac{r(r-1)}{2}$. Por lo dicho antes, de las que comparten un vértice solo una puede estar repetida. Además, si d fuera distancia repetida para los vértices A y B (o sea, existen en V puntos C_1 y C_2 distintos y D_1 y D_2 distintos tales que $d(A,C_1) = d(A,C_2) = d(B,D_1) = d(B,D_2)$), entonces los triángulos AC_1C_2 y BD_1D_2 serían congruentes.

El número de posibles distancias distintas es $\left[\frac{n}{2}\right]$. Como a lo sumo r de ellas están repetidas, podemos afirmar que el número total de distancias posibles (contando repeticiones) es $\left[\frac{n}{2}\right] + r$. En consecuencia,

$$\frac{r(r-1)}{2} \leq \left[\frac{n}{2}\right] + r \qquad \text{o sea} \qquad r(r-3) \leq 2\left[\frac{n}{2}\right]$$

Si n es impar, ya hemos terminado: $r(r-3) < n$.

Si n es par, parece que podría ser $r(r-3) = n$ y sin que haya dos triángulos congruentes. Sin embargo, esto no es posible. En el caso n par, para que se cumpla la igualdad, una de las distancias sería precisamente $n/2$ (un diámetro, AB, del polígono). En ese caso, de nuevo para que se dé la igualdad, tiene que haber dos vértices de V, pongamos C y D que equidistan de A, Entonces, también C y D equidistan de B y tenemos que los triángulos ACB y ADB son congruentes.

COMENTARIO FINAL

Hemos probado que si $n \leq r(r-3)$, entonces hay dos triángulos con vértices en V que son congruentes. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, si el valor de n es 5 o 6 y $r = 4$, habrá dos triángulos congruentes a pesar de que $r(r-3) < n$.

Por otra parte, es fácil comprobar que la cota general obtenida es, al menos en algunos casos, la mejor posible. Si $n = 10$ y $r = 5$ (o sea $r(r-3) = n$), habrá dos triángulos congruentes. Si $n = 11$ y $r = 5$ (o sea $r(r-3) < n$), se puede conseguir que no haya dos triángulos congruentes:

numeramos los vértices del polígono del 1 al 11 siguiendo el giro de las agujas del reloj; elegimos los vértices 1, 2, 3, 5 y 8 y se puede comprobar que de los 10 triángulos cuyos vértices están entre esos cinco no hay dos congruentes. De la misma manera, con $n = 18$ y $r = 6$, habrá dos triángulos congruentes. Si $n = 19$ y $r = 6$ se puede conseguir que no haya dos triángulos no congruentes eligiendo los vértices 1, 2, 3, 5, 8 y 13. Sin embargo, para $n = 29$ y $r = 7$, parece que es inevitable que haya dos triángulos congruentes.

¿Qué relación tiene esto con la sucesión de Fibonacci?

Problema 5.

Prueba. Primero observamos que

$$S(A) + S(B) = 1 + 2 + \ldots + 2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \cdot 1011 = 43 \cdot 47 \cdot 3 \cdot 337.$$

Como $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto, entonces existen enteros positivos a, b, c tales que $S(A) = a^2c$ y $S(B) = b^2c$. Por lo tanto,

$$(a^2 + b^2)c = S(A) + S(B) = 43 \cdot 47 \cdot 3 \cdot 337.$$

Los primos $3, 43, 47$ de la forma $4k+3$ por lo que no pueden expresarse como suma de cuadrados. El primo 337 es de la forma $4k + 1$ y se expresa como suma de cuadrados de forma única como $337 = 81 + 256$. Por lo tanto, obtenemos que $c = 3 \cdot 43 \cdot 47 = 3 \cdot 2021$ y $\{a^2, b^2\} = \{81, 256\}$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a^2 = 81$ y $b^2 = 256$, por lo que buscamos conjuntos A y B tales que $S(A) = 3 \cdot 81 \cdot 2021$ y $S(B) = 3 \cdot 256 \cdot 2021$. Podemos agrupar los números $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ de la siguiente forma,

$$\{\{2021\}, \{1, 2020\}, \{2, 2019\}, \ldots, \{1010, 1011\}\},$$

de manera que la suma de cada uno de ellos sea 2021. Así, el conjunto A podría ser cualquier escogencia de $3 \cdot 81$ de estos conjuntos y B podría ser los restantes $3 \cdot 256$.

Problema 4.

Prueba Solución 1.. Usando que $a^2 + x^2 = (b + c)^2 + (y + z)^2$, obtenemos que

$$(-a + b + c)(a + b + c) + (-x + y + z)(x + y + z) = (b + c)^2 - a^2 + (y + z)^2 - x^2 = 0.$$

Análogamente, obtenemos que

$$(a - b + c)(a + b + c) + (x - y + z)(x + y + z) = (a + b - c)(a + b + c) + (x + y - z)(x + y + z) = 0.$$

Sumando todas, obtenemos que

$$(a + b + c)^2 + (x + y + z)^2 = 0.$$

Por lo tanto, $a + b + c = x + y + z = 0$. Sustituyendo $c = -(a + b)$ y $z = -(x + y)$, obtenemos que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = (a + b)^2 + (x + y)^2.$$

Si denotamos por $2t^2$ la expresión anterior, entonces de la última ecuación deducimos que

$$ab + xy = \frac{1}{2}(2t^2 - (a^2 + x^2) - (b^2 + y^2)) = -t^2.$$

Tenemos entonces que

$$(2t^2 - a^2)(2t^2 - b^2) = x^2y^2 = (t^2 + ab)^2 \Longrightarrow 4t^4 - 2t^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 = t^4 + 2t^2ab + a^2b^2.$$

De esto deducimos que $3t^2 = 2(a^2 + ab + b^2) = a^2 + b^2 + c^2$. De manera análoga obtenemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2$, y así concluye el problema.

Prueba Solución 2.. Denotamos la expresión común por $2t^2$. De esta manera, las últimas tres ecuaciones nos dan que

$$ab + xy = ac + xz = bc + xy = -t^2.$$

Usando

$$4t^4 = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2) = (ab + xy)^2 + (ay - bx)^2 = t^4 + (ay - bx)^2,$$

por lo que $(ay-bx)^2 = 3t^4$. Análogamente, $(az-cx)^2 = (bz-cy)^2 = 3t^4$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &= (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2 \\ &= (ax+by+cz)^2 + 3\cdot 3t^4 \geq 9t^4.\end{aligned}$$

Sin embargo, por la desigualdad de MA-MG tenemos que

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leq \left(\frac{(a^2+b^2+c^2)+(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)^2 \leq (3t^2)^2 = 9t^4.$$

Con esto concluimos que debemos tener $a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2 = 3t^2$, como queríamos.

Recíprocamente, es obvio que si tenemos dos triángulos que son congruentes, entonces entre los vértices de esos dos triángulos hay cuatro distintos , A, B, C y D, tales que $d(A, B) = d(C, D)$.

En definitiva, solo tenemos que demostrar que si $r(r-3) \geq n$, entonces en V hay cuatro vértices distintos, A, B, C y D, tales que $d(A, B) = d(C, D)$.

Fijado un vértice de V, A, las posibles distancias a los demás pertenecen al conjunto $\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\}$. Además, fijada una distancia d, puede haber a lo sumo dos vértices que estén a distancia d de A.

Si hay cuatro vértices de V, B_1, C_1, B_2 y C_2, tales que $d(A, B_1) = d(A, B_2)$ y $d(A, C_1) = d(A, C_2)$, entonces los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 son congruentes (intercambiando si es necesario C_1 y C_2).

A partir de ahora, supongamos que no hay dos triángulos congruentes con vértices en V y vamos a probar que $r(r-1) < n$.

Al considerar las distancias desde un $A \in V$ a los otros $r-1$ vértices de V, solo una de las $r-1$ distancias puede estar repetida. O sea que el cardinal del conjunto de distancias desde A tiene que ser mayor o igual que $r-2$.

El número de posibles distancias entre vértices de V (contando las repeticiones de distancias que comparten un vértice; pero contando solo una vez $d(A, B) = d(B, A)$) es $\frac{r(r-1)}{2}$. Por lo dicho antes, de las que comparten un vértice solo una puede estar repetida. Además, si d fuera distancia repetida para los vértices A y B (o sea, existen en V puntos C_1 y C_2 distintos y D_1 y D_2 distintos tales que $d(A, C_1) = d(A, C_2) = d(B, D_1) = d(B, D_2)$), entonces los triángulos AC_1C_2 y BD_1D_2 serían congruentes.

El número de posibles distancias distintas es $\left[\frac{n}{2}\right]$. Como a lo sumo r de ellas están repetidas, podemos afirmar que el número total de distancias posibles (contando repeticiones) es $\left[\frac{n}{2}\right] + r$. En consecuencia,

$$\frac{r(r-1)}{2} \leq \left[\frac{n}{2}\right] + r \qquad \text{o sea} \qquad r(r-3) \leq 2\left[\frac{n}{2}\right]$$

Si n es impar, ya hemos terminado: $r(r-3) < n$.

Si n es par, parece que podría ser $r(r-3) = n$ y sin que haya dos triángulos congruentes. Sin embargo, esto no es posible. En el caso n par, para que se cumpla la igualdad, una de las distancias sería precisamente $n/2$ (un diámetro, AB, del polígono). En ese caso, de nuevo para que se dé la igualdad, tiene que haber dos vértices de V, pongamos C y D que equidistan de A, Entonces, también C y D equidistan de B y tenemos que los triángulos ACB y ADB son congruentes.

COMENTARIO FINAL

Hemos probado que si $n \leq r(r-3)$, entonces hay dos triángulos con vértices en V que son congruentes. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, si el valor de n es 5 o 6 y $r = 4$, habrá dos triángulos congruentes a pesar de que $r(r-3) < n$.

Por otra parte, es fácil comprobar que la cota general obtenida es, al menos en algunos casos, la mejor posible. Si $n = 10$ y $r = 5$ (o sea $r(r-3) = n$), habrá dos triángulos congruentes. Si $n = 11$ y $r = 5$ (o sea $r(r-3) < n$), se puede conseguir que no haya dos triángulos congruentes:

numeramos los vértices del polígono del 1 al 11 siguiendo el giro de las agujas del reloj; elegimos los vértices 1, 2, 3, 5 y 8 y se puede comprobar que de los 10 triángulos cuyos vértices están entre esos cinco no hay dos congruentes. De la misma manera, con $n = 18$ y $r = 6$, habrá dos triángulos congruentes. Si $n = 19$ y $r = 6$ se puede conseguir que no haya dos triángulos no congruentes eligiendo los vértices 1, 2, 3, 5, 8 y 13. Sin embargo, para $n = 29$ y $r = 7$, parece que es inevitable que haya dos triángulos congruentes.

¿Qué relación tiene esto con la sucesión de Fibonacci?

Segundo día

octubre del 2021

Problema 4. Solución. Consideremos la gráfica dirigida en la que cada primo del conjunto P representa un vértice, existe una arista que va de p_i a p_j si p_ip_j tiene el color p_j. Esto nos da una gráfica de un torneo (pues todos 'juegan' contra todos exactamente una vez). Diremos que p_j le gana a p_i en caso de que se tenga la arista que sale de p_i a p_j (que p_ip_j tenga el color p_j). Veamos que el torneo es transitivo, es decir, que si p_j le gana a p_i y p_i le gana a p_k, entonces p_j le gana a p_k. Supongamos que p_j le gana a p_i y p_i le gana a p_k, entonces p_ip_j es de color p_j y p_ip_k de color p_i, y supongamos que p_jp_k tiene el color p_k, consideremos las diferentes formas de 'separar' a $p_ip_jp_k$:

- $p_ip_jp_k = (p_ip_j)p_k \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_j o el color p_k (pues p_ip_j es de color p_j).
- $p_ip_jp_k = p_i(p_jp_k) \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_i o el color p_k (pues supusimos que p_jp_k es de color p_k).
- $p_ip_jp_k = (p_ip_k)p_j \Rightarrow p_ip_jp_k$ tiene el color p_i o el color p_j (pues p_ip_k es de color p_i).

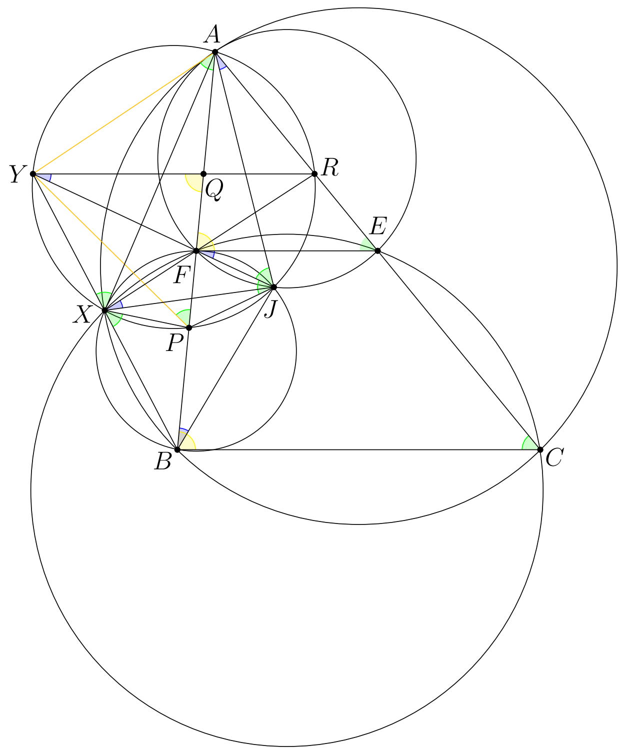
Notemos que esto nos lleva a una contradicción, pues no hay color posible que aparezca en los tres casos enlistados, y claramente $p_ip_jp_k$ debe ser de alguno de los colores p_i, p_j o p_k. Entonces p_jp_k es de color p_j, es decir, p_j le gana a p_k. Con esto hemos probado que el torneo es transitivo. Es fácil probar que en un torneo transitivo siempre hay un vértice que le gana a todos los demás, se puede hacer de manera inductiva, suponiéndolo cierto para $n-1$ vértices y viendo cómo interactúan el vértice n y el vértice ganador v del torneo inducido en los primeros $n-1$ vértices (si v le gana al n entonces v le gana a todos, y si n le gana a v, por la transitividad n le gana a todos). Con esto concluimos que existe un primo $p \in P$ tal que le gana a todos los demás primos de P, veamos que este primo cumple lo deseado.

Sea $m \in A$ tal que p divide a m, y supongamos que m tiene el color de otro primo q (claramente $q|m$). Veamos que los colores de p y de q se intersectan:

- q es de color q, y divide a pq que es de color p.
- p es de color p, y divide a m, que es de color q.

Entonces los colores de p y q se intersectan, lo que es una contradicción a las hipótesis del enunciado. Entonces m debe ser de color p, como queríamos probar.

Problema 5.



Solución:
Notemos que $\measuredangle C = \measuredangle YXA$, pero también, $\measuredangle C = \measuredangle YAP = \measuredangle YPA$, es decir que $\measuredangle YXA = \measuredangle YPA \Rightarrow YXPA$ cíclico. Llamemos al circuncìrculo de $YXPA$ ω y nombremos $J = YF \cap \omega$. $AFJE$ también es cíclico, pues $\measuredangle AJY = \measuredangle AJF = \measuredangle YXA = \measuredangle C = \measuredangle AEF$. Ahora, por potencia de punto, $YA^2 = YF \cdot YJ = YX \cdot YB \Rightarrow BXFJ$ cíclico.

$R = XF \cap AC$. $\measuredangle YXF = \measuredangle YXR = \measuredangle B$ y $\measuredangle YAR = \measuredangle YAC = 180 - \measuredangle B \Rightarrow YXRA$ es cíclico. $\measuredangle ARY = \measuredangle AXY = \measuredangle C \Rightarrow YR \parallel BC \Rightarrow Y - Q - R$ alineados.

$\measuredangle BXF = \measuredangle BXC + \measuredangle FXC = \measuredangle A + \measuredangle C = 180° - \measuredangle B = \measuredangle BFE \Rightarrow FE$ es tangente a $(BXFJ) \Rightarrow \measuredangle JBQ = \measuredangle JBF = \measuredangle JYR = \measuredangle JYQ \Rightarrow BJQY$ cíclico. Por potencia de punto, $FP \cdot FA = FJ \cdot FY = FQ \cdot FB \Rightarrow FP = FQ$, lo que queríamos probar.
Nota: Si se prueba que $Y - Q - R$ alineados, puede usar potencia de punto en los cuadriláteros cíclicos $BXQR$ y $XPRA$ para llegar al resultado deseado.

Problema 6. Solución 1:

Primero verifiquemos que ocurre si $P(x) = c$ constante. En este caso tendríamos que

$$0 < \tau(c) = c$$

de donde c es positivo. Sin embargo, $0 < \tau(c) \leq c$ pues todos los divisores de c son menores o iguales que c. Además solo se cumple la igualdad si $c = 1, 2$ pues en otro caso $1 < n - 1 \mid n$ lo cual es imposible. Entonces $P(x) = 1$ o $P(x) = 2$.

Ahora supongamos que $P(x)$ no es constante. Como $\tau(p^{a-1}) = a$, sabemos que la función τ es sobreyectiva en $\mathbb{Z}^+$, por lo que si escogemos un valor tal que $\tau(a)$ sea lo suficientemente grande y evaluamos la relación en este valor. Entonces sabemos que para algún valor x lo suficientemente grande tenemos que

$$0 < \tau(P(x)) = P(\tau(x))$$

por lo que el coeficiente principal de P es positivo

Sea A la imagen del polinomio y sea $a = P(b) \in A$. Si evaluamos la condición en $n = b$ tenemos que

$$\tau(a) = P(\tau(b)) \in A$$

Luego $\tau(a) \in A$.

Como P no es constante, sabemos que existe un m mayor a 2 en A.

Ahora notemos que $\tau(\tau(\tau(\dots(m)\dots))) = 2$ si aplicamos suficientes veces τ, por lo mencionado anteriormente al iterar τ, el valor decrece, además como el unico entero con solo un divisor es 1 y $m > 1$ al aplicar τ tenemos que eventualmente vamos a llegar a 2. Entonces $2 \in A$.

Si evaluamos la condición del problema en un primo q, tenemos que

$$\tau(P(q)) = 2$$

Luego $P(q)$ es primo para todo primo q.

Ahora hay dos casos.

Caso 1: existe un primo q tal que $q \mid p(k)$ para algún k pero no divide a a_0.

Entonces es sencillo notar que $(q, k) = 1$ pues si no lo fueran, $q \mid a_0$ que es absurdo. Además tenemos que evaluando modulo q sabemos que

$$q \mid p(k + qm) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Por el teorema de Dirichlet existen infinitos primos de la forma $k + qm$. En particular si tomamos uno suficientemente grande, $P(k + qm) > q$ pero será múltiplo de q. Por lo tanto $P(k + qm)$ no será primo lo que nos da una contradicción.

Caso 2: Todos los primos que dividen a $P(x)$ dividen a a_0.

Si $\{p \mid p \text{ primo en } A\}$ es finito, entonces algún primo q aparece infinitas veces al evaluar P en todos los primos. Entonces el polinomio $P(x) - q$ tiene infinitas raíces por lo que debe ser 0 y P es constante en este valor. Sin embargo sabemos que P no es constante. Entonces $\{p \mid p$ primo en

A } es infinito.

Esto significa que a_0 tiene infinitos divisores primos por lo que $a_0 = 0$.

Por lo que $\frac{P(x)}{x} \in \mathbb{Z}$ para todo x. En particular si evaluamos en un primo, tenemos que para p, q primos $\frac{q}{p}$ es entero. Entonces $p = q$ y para todos los primos P es la identidad. Entonces el polinomio $P(x) - x$ tiene infinitas raices, de donde es 0. Entonces $P(x) = x$ para todo x.

Solución 2:
Si P es constante procedemos como antes para demostrar que $P(x) = 1$ o $P(x) = 2$.

Ahora supongamos que $P(x)$ es de grado $n > 0$ y supongamos que $P(x) \neq ax^n$. Entonces podemos escribir $P(x) = x^m Q(x)$ de tal forma que $Q(x)$ no es constante y $Q(0) \neq 0$

Notemos que para p primo $\tau(p) = 2$. Como $P(x)$ no es cero para todo x y hay infinitos primos, podemos evaluar la relación en p tal que $P(p) \neq 0$ y obtener que

$$P(2) = \tau(P(p)) \quad (*)$$

Vamos a demostrar que $(*)$ implica implica una contradicción. Sea A el conjunto de los primos p tales que tales que $p \mid Q(m)$ para algún entero m. Supongamos que A es finito y que el producto de sus elementos es K. Entonces si tomamos un k lo suficientemente grande,

$$Q((KQ(0))^k) = Q(0)(B + 1)$$

con $B + 1 \neq 0, 1, -1$. Por construcción todos los $p \in A$ dividen a B. Entonces tenemos un primo que no está en A que divide a $Q((KQ(0))^k)$. Lo que demuestra que A es infinito.

Como $Q(0)$ tiene un numero finito de divisores primos, sabemos que existen infinitos primos que dividen a $Q(m)$ para algún m y no dividen a $Q(0)$. Tomemos un p que cumple lo anterior. Entonces m no es 0 modulo p, pues si $m \equiv 0 \pmod p$ entonces

$$0 \equiv Q(m) \equiv Q(0) \pmod p$$

lo cual es absurdo.

Además notemos que si $a \equiv m \pmod p$ entonces $p \mid Q(a)$.

Sea $P(2) = c$, tomemos $c + 1$ primos $p_1, p_2, \ldots p_{c+1} \in A$ tales que p_i no divide a $Q(0)$ para ningún i. Sea a_i el valor tal que $p_i \mid P(a_i)$, ya demostramos que $(p_i, a_i) = 1$.

Sea $B = p_1 p_2 \ldots p_{c+1}$. Por el teorema chino del residuo sabemos que existe un a en modulo B tal que $a \equiv a_i \pmod{p_i}$ para todo i. Además sabemos que $(a, B) = 1$.

Entonces por el teorema de Dirichlet existe algún primo q tal que $q \equiv a \pmod{B}$. Por construcción, $p_i \mid Q(q)$ para todo i. Entonces $\tau(P(q)) \geq c+1$. Lo que contradice $(*)$.

Entonces $P(x) = ax^n$, necesitamos que

$$\tau(ax^n) = a(\tau(x))^n \quad (1)$$

para todo x.

Si evaluamos (1) en $x = 2$, tenemos que

$$0 < \tau(a \times 2^n) = a \times 2^n$$

De donde $a \times 2^n = 1, 2$. Como $n > 0$, tenemos que $a \times 2^n \geq 2$ luego $a \times 2^n = 2$ de donde $n = a = 1$.

Entonces $P(x) = x$ y ya está.