XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Segundo día

20 de octubre del 2021

Problema 4. Sean a, b, c, x, y, z números reales tales que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a+b)^2 + (x+y)^2 = (b+c)^2 + (y+z)^2 = (c+a)^2 + (z+x)^2.$$

Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 5. Para un conjunto finito C de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos no vacíos A y B cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

Problema 6. Considere un polígono regular de n lados, $n \geq 4$, y sea V un subconjunto de r vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a V.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos