XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer día

19 de octubre del 2021

Problema 1. Sea $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ un conjunto de 10 primos distintos y sea A el conjunto de todos los enteros mayores que 1 tales que en su descomposición en factores primos aparecen únicamente primos de P. Los elementos de A se colorean de tal forma que:

a) cada elemento de P tiene un color distinto,

b) si $m, n \in A$, entonces mn tiene el mismo color de m o n,

c) para cualquier par de colores distintos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, no existen $j, k, m, n \in A$ (no necesariamente distintos), con j, k de color $\mathcal{R}$ y m, n de color $\mathcal{S}$, tales que j divide a m y n divide a k, simultáneamente.

Demuestre que existe un primo de P tal que todos sus múltiplos en A tienen el mismo color.

Problema 2. Considere un triángulo acutángulo ABC, con $AC > AB$, y sea Γ su circuncírculo. Sean E y F los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. El circuncírculo del triángulo CEF y Γ se cortan en X y C, con $X \neq C$. La recta BX y la tangente a Γ por A se cortan en Y. Sea P el punto en el segmento AB tal que $YP = YA$, con $P \neq A$, y sea Q el punto donde se cortan AB y la paralela a BC que pasa por Y. Demuestre que F es el punto medio de PQ.

Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Problema 3. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos