XXXII Olimpíada Nacional de Matemática 2020

PRUEBA FINAL

NIVEL MAYOR

24 Octubre 2020

1. Determine todos los enteros positivos n de tal manera que la representación decimal del número $6^n + 1$ tiene todos sus dígitos iguales.

Respuesta.

Notemos que para $n = 1$ se cumple puesto que $6^1 + 1 = 7$. Para $n = 2, 3, 4$ no se cumple puesto que

$$6^2 + 1 = 37\,, \quad 6^3 + 1 = 217\,, \quad 6^4 + 1 = 1297\,.$$

Supongamos que $n \geq 5$ y que $6^n + 1$ tiene k dígitos todos iguales a 7.

$$6^n + 1 = \underbrace{77\ldots 7}_{k} = 7 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + \cdots + 7 \cdot 10^{k-1}$$

Luego, $6^n + 1 = 7(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}) = 7\,\dfrac{10^k - 1}{9}$.

Puesto que $n \geq 5$,

$$2^4(2^{n-4}3^{n+2} + 1) = 7 \cdot 2^k \cdot 5^k$$

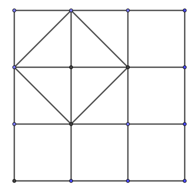
Como $(2^{n-4}3^{n+2} + 1)$ es impar (2 no es factor primo de un número impar) se deduce que $k = 4$.

Por lo tanto,

$$2^{n-4}3^{n+2} + 1 = 7 \cdot 5^4 = 4375 \Longrightarrow 3^{n+2}2^{n-4} = 4374 = 2 \cdot 3^7\,.$$

Luego, n = 5. Por lo tanto las únicas soluciones son $n = 1$ y $n = 5$.

2. Los puntos de este reticulado $4 \times 4 = 16$ puntos pueden ser vértices de cuadrados.

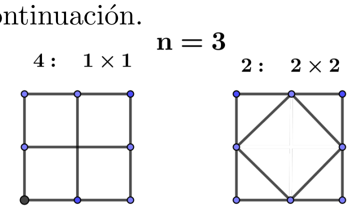


Calcule la cantidad de cuadrados distintos que se pueden formar en un reticulado de 100×100 puntos.

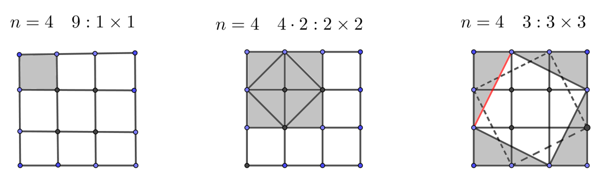
Respuesta.

Llamemos C_n la cantidad de cuadrados con $n \times n$ puntos. Evidentemente que hay que calcular alguna fórmula que nos permita aplicarla para n = 100.

Algunos casos particulares : $C_2 = 1$. Para $C_3 = 6$ puesto que hay cuatro cuadrados de 1×1 y dos más como se muesta a continuación.



Para un cuadriculado de 4×4 puntos se pueden construir 20 cuadrados distintos:



Total : $9 + 8 + 3 = 20$

Notamos que un cuadrado de $m \times m$ que se construye con $m + 1$ puntos por lado se pueden contruir m cuadrados que tengan sus vértices en el borde. Ver $n = 4$ en figura.

Para contar la cantidad de cuadrados en un reticulado de $n \times n$, que de facto corresponde a $(n-1) \times (n-1)$ cuadrados de 1×1, procedemos de la siguiente manera:

Paso 1.

- Hay $(n-1) \cdot (n-1) = (n-1)^2)$ cuadrados de 1×1
- Hay $(n-2) \cdot (n-2) = (n-2)^2)$ cuadrados de 2×2

Paso 2. En general hay $(n-k) \cdot (n-k) = (n-k)^2$ cuadrados de $k \times k$ con $k = 1, \ldots, n-1$.
Paso 3. Todos estos cuadrados contados tienen lados horizontales y verticales.

Pero, cada uno de los cuadrados de $k \times k$ produce $(k-1)$ cuadrados de lados no horizontales. Esto se prueba directamente observando que si $T(a, b)$ es el trazo que une a $(a, 0)$ con $(0, b)$ entonces hay exactamente $T(2, k-1), T(3, (k-2), \ldots, T(k-1, 2))$ lados de cuadrados distintos con vértices en el del cuadrado de $k \times k$.

En resumen, para etapa k hay $(n-k)^2k$ cuadrados.

Paso 4. Por lo tanto el número total de cuadrados es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2k &= n^2\sum_{k=1}^{n-1}k - 2n\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^3 \\
&= \frac{n^2(n-1)n}{2} - \frac{2n(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)^2n^2}{4} \\
&= \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}
\end{aligned}$$

Luego, para n = 100 se obtienen $(99 \cdot 100^2 \cdot 101) = 8.332.500$ cuadrados.

Solución 2

La idea es contarlos según el vector de uno de los lados con pendiente mayor o igual a 0.

Si ese vector es (a, b) con a positivo y b no negativo, no es difícil ver que para que quepa en el reticulado de $n \times n$ se debe tener $a + b$ menor o igual a n.

Si $n - a - b = k$, entonces hay $(k)^2$ formas de ponerlo en el reticulado. El valor de k debe estar entre 1 y $n - 1$.

Por lo tanto, dado k, hay $n - k = a + b$ vectores posibles.

El número de cuadrados es entonces la suma desde $k = 1$ a $n - 1$ de $k^2(n - k)$.

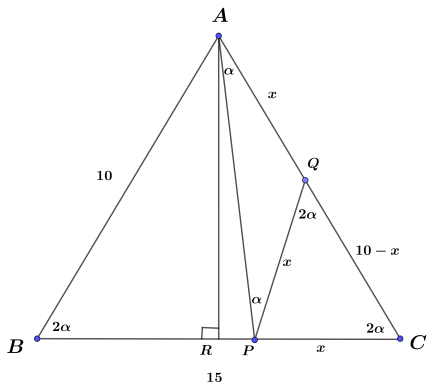
Esta suma se calcula y es $\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}$.

3. Dado el triángulo isósceles ABC con $|AB| = |AC| = 10$ y $|BC| = 15$ se escogen los puntos P en BC y Q en AC tales que $|AQ| = |QP| = |PC|$.

Calcule la razón $\dfrac{\text{Area}(\triangle PQA)}{\text{Area}(\triangle ABC)}$.

Respuesta

Llamemos $x = |CP| = |CQ| =$ y $\alpha = \angle PAC$. Usando que los triángulos ABC, AQP, QPC son isósceles se llega a lo siguiente, como muestra la figura donde h es la altura AR.



De esta manera se prueba que los triángulos ABC y PCQ son semejantes y por lo tanto

$$\frac{10 - x}{15} = \frac{x}{10} \Longrightarrow x = 4\,.$$

Por otro lado, R dimidia al lado BC, por ser el triángulo ABC isósceles, $|RP| = \frac{15}{2} - 4$. Aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene que

$$h^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 10^2 \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{175}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{2}\,.$$

Por lo tanto, el área del $|\triangle ARP| = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{7}{2} = \dfrac{35\sqrt{7}}{8}$.

Además la razón de semejanza entre ABC y PCQ es $\dfrac{2}{5}$. Por lo tanto el área del $\triangle ARP$ es igual a

$$|\triangle PCQ| = \left(\frac{2}{5}\right)^2 |\triangle ABC| = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{75\sqrt{7}}{4} = 3\,\sqrt{7}\,.$$

Luego, el área $|\triangle PQA| = \dfrac{75\sqrt{7}}{8} - \dfrac{35\sqrt{7}}{8} - 3\,\sqrt{7} = 2\sqrt{7}\,.$

Resumiendo, la razón entre las áreas es $\dfrac{8\sqrt{7}}{75\sqrt{7}} = \dfrac{8}{75}$.

4. Determine todos los tríos de números enteros (x, y, z) que son solución del sistema

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ x^3 + y^3 - z^3 &= 414 \end{aligned}$$

Respuesta.

Recordemos que buscamos soluciones en los números enteros.

Sea $w = -z$ de manera que

$$x + y + w = 6\,, \qquad x^3 + y^3 + w^3 = 414\,.$$

Por simetría del sistema anterior, si hay una solución (a, b, c) toda permutación del trío es también solución.

Como

$$-198 = 6^3 - 414 = (x + y + w)^3 - (x^3 + y^3 + w^3) = 3(x + y)(x + w)(y + w)$$

Entonces $(6 - w)(6 - x)(6 - y) = -66\,.$

Si cambiamos variables:

$$r = w - 6\,, \quad s = x - 6\,, \quad t = y - 6$$

el sistema original resulta ser equivalente a

$$r + s + t = -12\,, \qquad rst = 66\,.$$

Como el producto es positivo y la suma es negativa, debe haber 2 de los 3 números que sean negativos y uno positivo.

Sin perdida de generalidad digamos que $r < s < 0 < t$ (al final debemos considerar las permutaciones).

Si $t = 1$, entonces $r + s = -13$, $rs = 66$, es decir r y s son soluciones de la ecuación $u^2 + 13u + 66 = 0$ que no tiene soluciones reales.

Si $s = -1$, entonces $r + t = -11$, $rt = -66$, es decir , r y t son soluciones de la ecuación $u^2 + 11u - 66 = 0$ cuyo discriminante $11^2 + 4 \cdot 66 = 385$ no es un cuadrado perfecto.

Si $r = -1$, entonces $s = -1$ por el orden impuesto ($r \leq s$).

Podemos decir entonces que $|r|, |s|, |t|$ son $2, 3, 11$ en algún orden, $(-3, -2, 11)$, $(-11, -2, 3)$ ó $(-11, -3, 2)$ son los únicos que respetan el orden.

Si $s = -2$ entonces $r + t = -10$, $rt = -33$, es decir r y t son soluciones de la ecuación $u^2 + 10u - 33 = 0$ cuyo discriminante $10^2 + 4 \cdot 33 = 232$ no es un cuadrado perfecto.

Solo queda el caso $r = -11$, $s = -3$ y $t = 2$.

Se deduce que $x = -5$, $y = 3$, $w = 8\,(z = -8)$ y obtenemos 6 soluciones permutando x, y, w.

Las soluciones son $(x, y, z) = (-5, 3, -8), (3, -5, -8), (-5, 8, -3), (8, -5, -3), (3, 8, 5), (8, 3, 5)$. Son esas 6 y no podemos seguir permutando pues no es simétrico en x, y, z sino en x, y, w.