Nivel Mayor - PAUTA

Problema 1 Un cuadrado de tres por tres se subdivide en 9 cuadraditos de uno por uno. Se desea distribuir los nueve dígitos $1, 2, \ldots, 9$ en cada cuadradito de 1×1, un número en cada cuadradito. Calcule la cantidad de distribuciones distintas que se pueden formar de tal manera que la diferencia de los dígitos en celdas que comparten un lado en común es menor o igual a tres.
Dos distribuciones son distintas incluso si ellas difieren por rotación y/o reflexión.

Solución.
Notamos que $9, 8, 7, 3, 2, 1$ no pueden estar en el centro.

Se pueden encontrar las siguientes configuraciones para $4, 5, 6$ en el centro:

1	2	3	4	2	1	7	4	1	9	6	3
4	5	6	7	5	3	9	6	3	7	4	1
7	8	9	9	8	6	8	5	2	8	5	2

Las rotaciones mantienen las abyacencias, es decir, la propiedad de los vecinos se conserva. Esto hace que cada una de las 4 configuración produce cuatro más.

Además la reflexión respecto a la columna del medio produce otra con figuración la cual por rotación produce cuatro más.

En resumiendo, cada configuración produce 8 distribuciones distintas.
Las con centro 4 y 6 producen 8 cada una, todas diferentes.

7	4	1	1	4	7	9	6	3	3	6	9
9	6	3	3	6	9	7	4	1	1	4	7
8	5	2	2	5	8	8	5	2	2	5	8
8	9	7	2	3	1	8	7	9	2	1	3
5	6	4	5	6	4	5	4	6	5	4	6
2	3	1	8	9	7	2	1	3	8	7	9
2	5	8	8	5	2	2	5	8	8	5	2
3	6	9	9	6	3	1	4	7	7	4	1
1	4	7	7	4	1	3	6	9	9	6	3
1	3	2	7	9	8	3	1	2	9	7	8
9	6	5	4	6	5	6	4	5	6	4	5
7	9	8	1	3	2	9	7	8	3	1	2

Las dos configuraciones con centro 5, ninguna se logra de la otra mediante rotaciones ni reflexiones. Basta mirar sus esquinas. Luego cada una de ellas aporta 8 configuraciones adicionales.

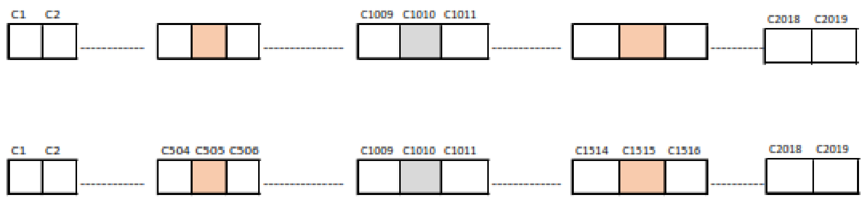
En resumen, hay 32 configuraciones distintas con la propiedad requerida.

Problema 2 Javiera y Claudio juegan en un tablero que consiste en una fila con 2019 celdas. Claudio empieza colocando una ficha en cualquier parte del tablero. A continuación Javiera dice un número natural k, $1 \leq k \leq n$ y Claudio debe mover la ficha a la derecha o a la izquierda a su elección k casillas y así sucesivamente.

Javiera gana si logra sacar del tablero la ficha que mueve Claudio. Determine el menor n de tal manera que Javiera siempre gana después de un número finito de movidas.

Solución.

Puesto que hay 2019 celdas en línea hay una que está en el centro. Si las numeramos de izquierda a derecha, la celda del centro corresponde a la 1010.



La respuesta: $n = (2019 + 1)/2 = 2020/2 = 1010$. Primero se debe probar que no importando de donde parte Claudio ni como se mueva, Javiera tiene una combinación de movimientos, ninguno mayor que 1010 de tal manera saca del tablero la ficha. Hay cuatro regiones:

$$R_1 : 1 - 504\,, \quad R_2 : 505 - 1009\,, \quad R_3 : 1010 - 1514\,, \quad R_4 : 1515 - 2019\,.$$

Si Claudio coloca la ficha en el medio, casilla C1010, Javiera le dicta 1010, con ello independiente de la dirección de movimiento de Claudio, la ficha queda afuera del tablero.

Si Claudio coloca la ficha en la celda 505, Javiera le dicta 505 con lo cual Claudio se mueve a la derecha (si lo hace la izquierda se sale del tablero) quedando la ficha en la celda gris 1010. A continuación le dicta 1010, quedando fuera del tablero.

Si la ficha se coloca en la celda $505 - p$ con $1 \leq p < 505$, región R_1, Javiera dicta $k_p = 505 + p$ que es un movimiento permitido pues $k_p < 1010$. La ficha se debe trasladar hacia la derecha hasta posición gris 1010 (a la izquierda se sale del tablero), y después con dictar 1010 la ficha se sale del tablero.

Si la ficha se coloca en la celda $p \in R_4$ con $p = 1515 + q$ con $q \leq 504$, Javiera dicta $505 + q$ obligando a Claudio a mover a la izquierda, la ficha queda en la posición $1515 + q - (505 + q) = 1010$ la posición gris 1010 y después con dictar 1010 la ficha se sale del tablero.

Si la ficha es colocada en la región R_3, $1011 - 1514$, mediante el movimiento de longitud 1010 en dirección izquierda (a la derecha se sale) se lleva la ficha a la región R_1, donde ya sabemos como operar.

Si la ficha se ubica en la región R_2 mediante el movimiento de longitud 1010 en dirección derecha (a la izquierda se sale) se lleva la ficha a la región R_4, donde ya sabemos como operar.

Hay que argumentar porqué $n = 1010$ es el menor valor.

Problema 3 Encuentre todas las soluciones x, y, z en los enteros positivos de la ecuación

$$3^x - 5^y = z^2 .$$

Solución. Aplicando aritmética módulo 5 a la ecuación se obtiene de inmediato que $3^x = z^2(5)$. De lo cual se deduce que $x = 2t$.
Luego,

$$(3^t - z)(3^t + z) = 3^{2t} - z^2 = 5^y$$

Como 5 es primo,

$$(3^t - z) = 5^\alpha , \quad (3^t + z) = 5^\beta , \text{ con } \alpha + \beta = y .$$

Luego, $2 \cdot 3^t = 5^\alpha + 5^\beta = 5^\alpha(1 + 5^{\beta-\alpha}) \Rightarrow \alpha = 0$. Por lo tanto, $\beta = y$.

De esta manera obtenemos la ecuación equivalente:

$$2 \cdot 3^t = 5^y + 1 . \qquad (*)$$

Por otro lado, $5^y + 1 = 5^y - (-1) = 6(5^{y-1} + (-1)5^{y-2} + \cdots + 1)$ y entonces

$$3^{t-1} = (5^{y-1} + (-1)5^{y-2} + \cdots + 1) \Rightarrow 3^{t-1} \equiv y(3) .$$

Por lo tanto, si $t > 1$ se obtiene que $y = 3k$.

Es decir, para $t > 1$, por (*) $\quad 2 \cdot 3^t = 5^{3k} + 1$.

Si $k = 1$ entonces $5^3 + 1$ debe dividir a $5^y + 1$, como este último tiene como divisores primos sólo al 2 y el 3 se obtiene una contadicción puesto que $5^3 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Luego $t = 1$, es decir, $x = 2$ y por (*)

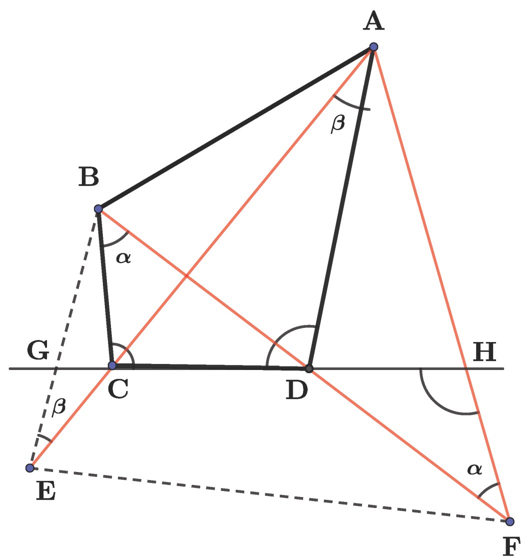
$$6 = 5^y + 1 \Rightarrow y = 1 .$$

En resumen, sabiendo x, y determinan z. La solución es $x = 2$, $y = 1$ y $z = 2$.

Problema 4 En el cuadrilátero convexo $ABCD$ el $\angle ADC = \angle BCD > 90^o$. Sea E la intersección de la línea AC con la línea paralela a AD que pasa por B y F la intersección de la línea BD con la línea paralela a BC que pasa por A. Pruebe que EF es paralelo a CD.

Solución.

Dibujo del problema



Notamos que

$$\triangle EGC \sim \triangle ADC \quad , \quad \triangle FHD \sim \triangle BCD$$

Luego,

$$\frac{|EG|}{|AD|} = \frac{|GC|}{|DC|}, \quad \frac{|FH|}{|BC|} = \frac{|DH|}{|DC|}$$

Por lo tanto, $|DC| = \dfrac{|AD| \cdot |GC|}{|EG|}$ y $|DC| = \dfrac{|BC| \cdot |DH|}{|FH|}$.

Luego,

$$\frac{|EG|}{|FH|} = \frac{|AD| \cdot |GC|}{|BC| \cdot |DH|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DH|} = \frac{|BC|}{|GC|}.$$

Entonces:

$$\frac{|EG|}{|FH|} = \frac{|AD|}{|DH|} \cdot \frac{|GC|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|EG|}{|FH|} = \frac{|BC|}{|GC|} \cdot \frac{|GC|}{|BC|} = 1$$

Luego, $|EG| = |FH|$.

En resumen, se ha probado que el cuadrilátero es un trapecio isósceles, es decir, $GH||EF$.