Nivel Menor - PAUTA

Problema 1 ¿De cuántas formas se puede escribir 2019 como suma de enteros positivos consecutivos?

Solución.

Suma de k números consecutivos partiendo de n se calcula

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2)+\cdots(n+k) &= (k+1)n+\frac{k(k+1)}{2} \\ &= (k+1)\left(\frac{2n+k}{2}\right) \end{aligned}$$

Puesto que 2019 tiene la descomposición primaria $2019 = 3\cdot 673$, se obtiene la igualdad

$$(k+1)\left(\frac{2n+k}{2}\right) = 2019 \Leftrightarrow (k+1)(2n+k) = 2\cdot 3\cdot 673$$

Caso 1.

$$k+1=6\,,\quad 2n+k=673 \Rightarrow 2n=668\,, k=5\,, n=334$$

Caso 2.

$$k+1=2\,,\quad 2n+k=2019 \Rightarrow n=1009\,, k=1$$

Caso 3.

$$k+1=3\,,\quad 2n+k=1346 \Rightarrow n=672\,, k=2$$

Las únicas soluciones son

$$\begin{aligned} 2019 &= 1009+1010 \\ 2019 &= 672+673+674 \\ 2019 &= 334+335+336+337+338+339\,. \end{aligned}$$

Problema 2 En una mesa hay 2019 fichas. Dos jugadores se turnan para sacar fichas. El primero que juega puede sacar cualquier cantidad impar de fichas entre 1 y 99. El otro jugador puede sacar cualquier cantidad par de fichas entre 2 y 100. El jugador que no puede seguir jugando pierde. Determine si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.

Solución.

El primer jugador tiene una estrategia ganadora.

Descipción estrategia.

La idea se basa en que $2019 = 101 \cdot 19 + 100$

Llamemos $b_1, b_2, \ldots$ las jugadas del segundo jugador, el cual sólo puede extraer un número par de fichas de la mesa entre 2 y 100.

Entonces necesitamos que se de en las primeras 19 jugadas la sucesión

$$\begin{aligned} a_1 &= 99 \\ a_{k+1} &= 101 - b_k \text{ para } 1 \leq k \leq 19 \end{aligned}$$

donde a_k es la k movida del primer jugador.

En la vigésima ronda, quedan

$$2019 - 99 - 19 \cdot 101 = 1 \quad \text{fichas}$$

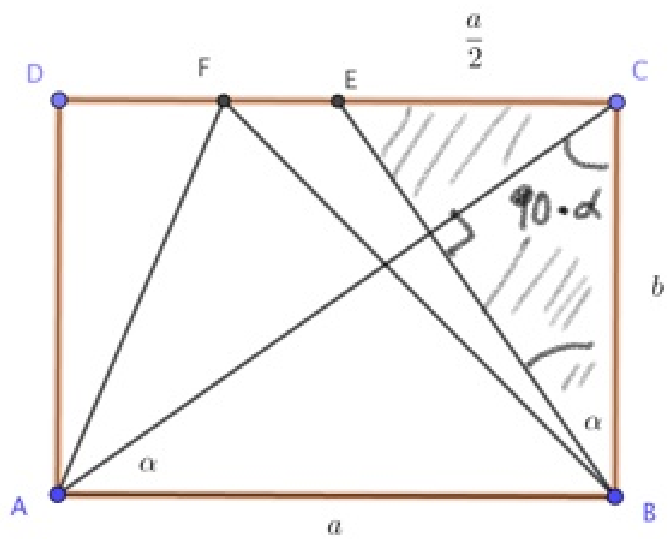
y el segundo jugador pierde.

Pueden haber otras soluciones.

Problema 3 Considere un rectángulo $ABCD$ con $|AB| > |BC|$ y E el punto medio del lado CD. Se elige F en CD de tal manera que $|CF| = |BC|$. Suponga que $AC \perp BE$. Pruebe que $|AB| = |BF|$. La notación $|BF|$ representa la longitud del trazo BF.

Solución.

Sean $|BC| = b$ y $|FC| = b$. Por Teorema de Pitǵoras $|BF| = b\sqrt{2}$.



El triángulo ABC es semejante con el triángulo BCE. Por lo tanto se obtiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \Longrightarrow \frac{a^2}{2} = b^2 .$$

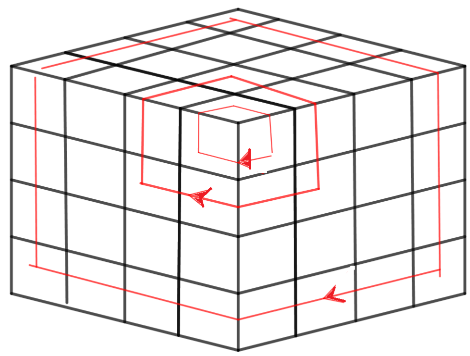
Por lo tanto,

$$a^2 = 2b^2 \Longrightarrow |AB| = a = b\sqrt{2} .$$

Probando lo pedido.

Problema 4 Cada cara de un cubo de dimensiones $1000 \times 1000 \times 1000$ se divide en 1000^2 cuadraditos unitarios de 1×1. Determine la cantidad mayor de cuadraditos unitarios que se pueden marcar en el cubo de tal manera que ningún par de ellos comparte un lado en común.

Solución. Miremos el cubo,



Alrededor de cada esquina hacemos caminos de largo

$$3 \cdot (2k-1) = 6k - 3\,, \quad 1 \leq k \leq 500\,.$$

Como hay 8 esquinas esto hace $8 \cdot 500 = 4{,}000$ caminos.

Cada camino tiene a lo más $3k-2$ cuadraditos pintados. El número de cuadrados pintados no puede ser mayor que

$$\begin{aligned} 8 \cdot \sum_{k=1}^{500}(3k-2) &= 4 \cdot \sum_{k=1}^{500}[(6k-3)-1] = 4\left(\cdot \sum_{k=1}^{500}(6k-3) - 500\right) \\ &= 3 \cdot 10^6 - 2000 \end{aligned}$$

El óptimo se obtiene dejando sin pintar las caras a un lado de cada una de las cuatro aristas azules del cubo.