XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Mayor

Resolución Prueba Nacional
25 Agosto de 2018

Problema 1. De un libro de 1000 páginas se han arrancado una cantidad consecutiva de hojas. Se sabe que la suma de los números de las páginas arrancadas es 2018. Determine la numeración de las páginas faltantes.

Solución

Como las hojas faltantes son consecutivas, llamamos $a, a+1, a+2, \ldots, a+(n-1)$ la numeración de las páginas ellas. Como cada hoja contiene dos páginas, n debe ser par.

Sumando las numeraciones se obtiene que

$$a + a + 1 + a + 2 + \cdots + a + (n-1) = na + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2018\,.$$

Entonces, usando que la descomposición primaria de $2018 = 2 \cdot 1009$.

$$na + \frac{(n-1)n}{2} = 2018 \Rightarrow 2na + (n-1)n = 2^2 \cdot 1009\,.$$

De esta manera,

$$n(2a + (n-1)) = 2^2 \cdot 1009\,.$$

Como n es par , $2a + (n-1)$ es impar. y el único divisor de impar de $2^2 \cdot 1009$ es 1009.

Luego,se debe cumplir que : $n = 4$ y $2a + (n-1) = 1009$, cuya solución es $a = 503$.

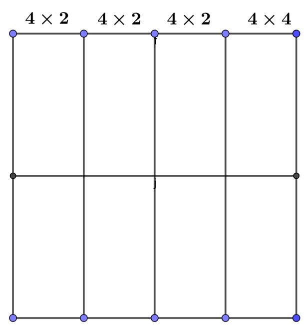
Por lo tanto la numeración de las páginas faltantes son: $503, 504, 505, 506$.

Nota. Si solo calcula la numeración de las páginas mediante inspección tiene a lo más 3 puntos.

Problema 2. Un cuadrado de lado 8 cm se divide en 64 cuadraditos de 1 cm^2. Se colorean 7 cuadraditos de negro y el resto de color blanco. Encuentre la máxima área de un rectángulo compuesto solo por cuadraditos blancos independiente de la distribución de los cuadraditos negros.

Solución

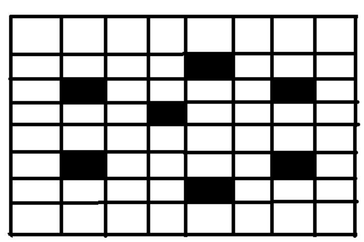
Construyamos la siguiente partición del cuadrado de 8×8 en 8 pedazos rectángulares de 4×2 como muestra la figura.



Por el Principio del Palomar, hay al menos un rectángulo de $4 \times 2 = 8$ cm^2 que no tiene ningún cuadradito negro en su interior.

Esto prueba que al menos un rectángulo de $4 \times 2 = 8$ cm^2 se puede elegir independiente de la distribución de los cuadraditos negros.

Ahora mostramos una distribución de cuadraditos negros que no permite rectángulos de mayor área que $4 \times 2 = 8$ cm^2, lo cual demuestra que el rectángulo de mayor área que se puede elegir es realmente $4 \times 2 = 8$ cm^2, como muestra la figura:



Problema 3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se desea encontrar una partición de $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ en M subconjuntos disjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_M$, vale decir,

$$\omega = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_M \quad \text{ con } S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{ para } i \neq j\,,$$

de modo que la suma de los elementos de cada S_i sea la misma. ¿Cuál es el máximo valor posible de M?

Solución

El máximo valor posible de M es $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Sea $S_1, S_2, \ldots, S_M$ una partición en M subconjuntos de tal manera que todos tienen la misma suma, digamos s.

Así, $Ms = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$, y encontrar el máximo valor posible de M es equivalente a encontrar el mínimo valor posible de s.

Así, determinaremos el menor valor posible de s y a partir de este el máximo valor posible de M.

En primer lugar, vemos que —ya que la suma del subconjunto que contiene a n es al menos n—, $s \geq n$.

Distinguiremos dos casos:

- Si n es par, s no puede ser $= n$, ya que en ese caso
$$M = \frac{n(n+1)}{2s} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$
que no es entero.
Así, $s \geq n+1$. De hecho, su menor valor posible es $s = n+1$, ya que podemos dividir A en $\dfrac{n}{2}$ conjuntos de suma $n+1$:
$$\{1, n\}\,, \{2, n-1\}\,, \ldots \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right\}.$$
En este caso, $M = \dfrac{n(n+1)}{2s} = \dfrac{n(n+1)}{2(n+1)} = \dfrac{n}{2}$.

- Por otra parte, si n es impar, su menor valor posible es precisamente n: en este caso, podemos tomar los conjuntos como
$$S_1 = \{n\}\,, S_2 = \{1, n-1\}\,, S_3 = \{2, n-2\}\,, \ldots, S_M = \left\{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}+1\right\}.$$
En este caso, $M = \dfrac{n(n+1)}{2s} = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$.

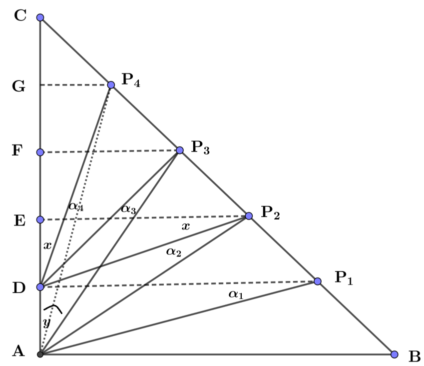
En resumen, si n es par, el máximo valor posible de k es $\dfrac{n}{2}$; y si n es impar entonces el máximo valor posible de M es $\dfrac{n+1}{2}$. Una expresión que resume estos dos casos es $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$, QED. [Ejemplos:]

- Si $n = 8$, $M = 4$: $\{1, 8\}\,, \{2, 7\}\,, \{3, 6\}\,, \{4, 5\}$.
- Si $n = 9$, $M = 5$: $\{9\}\,, \{1, 8\}\,, \{2, 7\}\,, \{3, 6\}\,, \{4, 5\}$.

Problema 4. En la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo isósceles ABC se eligen cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4 tal que $|BP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| = |P_4C|$. Se elige D un punto en el cateto AB de tal forma que $5|AD| = |AB|$. Calcule la suma de los cuatro ángulos $\angle AP_iD$, $i = 1, \ldots, 4$.

Solución

Miremos el diagrama de la situación



Por Teorema de Thales ;

$$AB \parallel GP_4 \parallel FP_3 \parallel EP_2 \parallel DP_1$$

trazos que además son perpendicupares al lado AC, puesto que $AB \perp AC$ por ser $\triangle ABC$ rectángulo isósceles.

Además $\measuredangle AP_3F = 45^o$, por ser AP_3 la diagonal de un rectángulo.

Se tienen la siguientes congruencias de triángulos:

(C1) $\triangle AGP_4 \sim \triangle DP_1A \Rightarrow \measuredangle GAP_4 = \alpha_1$

(C2) $\triangle AFP_3 \sim \triangle P_2EA \Rightarrow \measuredangle FAP_3 = EP_2A = y$

(C3) $\triangle DGP_4 \sim \triangle P_2ED \Rightarrow \measuredangle GDP_4 = EP_2D = x$

Usando las congruencias se tiene entonces que

$$\begin{array}{ccc} \alpha_4 + \alpha_1 = x & , & \alpha_3 + y = 45^o \\ x + \alpha_2 = y & , & \alpha_1 = \alpha_1 \end{array}$$

Sumando se obtiene lo pedido.