XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MENOR

Problema 1 Encuentre todos los primos p tales que p^2+2 es un número primo.

Solución.

Todo número está en una de las clases módulo 3.

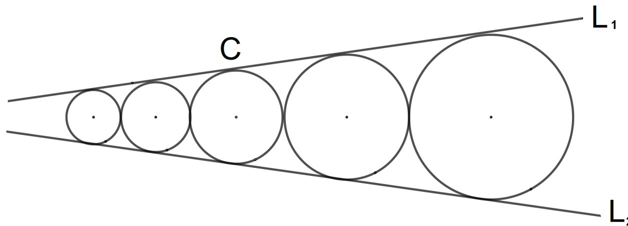
- El único primo divisible por 3 es 3, y en tal caso $3^2+2=11$ es primo.
- Si $p=3k+1$, con $k>1$ entonces se tiene que:
$$p^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)\,.$$
Esto es, p^2+2 es divisible por 3, luego no es primo.
- Si $p=3k+2$, con $k>1$ entonces se tiene que :
$$p^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+2k+2)\,.$$
Esto es, p^2+2 es divisible por 3, luego no es primo.

Por lo tanto, p^2+2 no es primo excepto para $p=3$.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

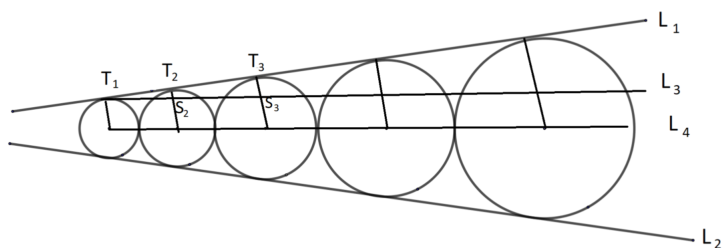
NIVEL MENOR

Problema 2 En el dibujo las cinco circunferencias son tangentes entre si y tangentes a las rectas L_1 y L_2 como se muestra en la figura siguiente:



La menor de las circunferencias tiene radio 8 y la mayor tiene radio 18. Calcule el radio de la circunferencia C.

Solución.
Trazamos la línea L_4 que une los centros de las circunferencias. A continuación se traza una línea L_3 paralela a L_4 como muestra la figura:



Llamemos $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$ a los respectivos radios de las circunferencias.
Por construcción $r_2 = r_1 + x$ y $r_3 = r_1 + y$ donde $x = S_2T_2$ e $y = S_3T_3$. Como los puntos de tangencias T_1, T_2, T_3 producen ángulos de 90^o entre la línea L_1 y los radios vectores se deduce que los trazos S_2T_2 , S_3T_3 son paralelos.

Luego, los triángulos $\triangle T_1S_2T_2$, $\triangle T_1S_3T_3$ tienen sus tres ángulos iguales. Esto prueba que ellos son triángulos semejantes. Por lo tanto

$$\frac{x}{2r_1 + x} = \frac{y}{4r_1 + 2x + y}$$

Completando cuadrado y usando que $r_2 = r_1 + x$ y $r_3 = r_1 + y$ se obtiene que

$$(r_1 + x)^2 = r_1\,(r_1 + y) \Rightarrow \boxed{r_2^2 = r_1\, r_3}\,.$$

Aplicando esta relación tres veces y puesto que $r_1 = 8$ y $r_5 = 18$ se deduce las siguientes igualdades:

$$r_2^2 = 8r_3\,, \quad r_3^2 = r_2\, r_4\,, \quad r_4^2 = 18r_3$$

Por lo tanto,

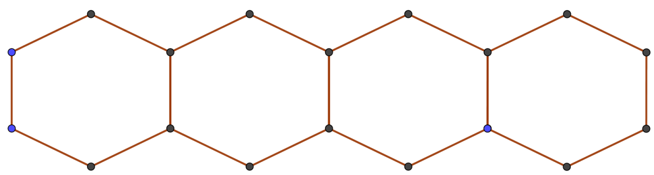
$$r_3^4 = r_2^2\, r_4^2 = 2^4\, 3^2 r_3^2\,,$$

obteniéndose que $r_3 = 12$.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MENOR

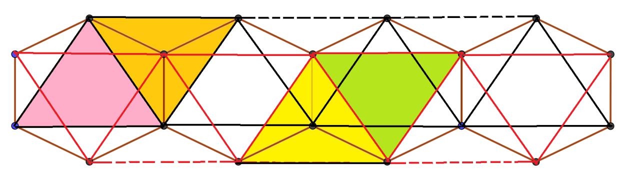
Problema 3 Considere una red compuesta por cuatro hexǵonos regulares como muestra la figura:



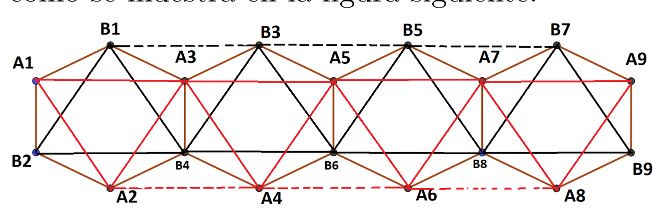
Una abeja y una mosca juegan el siguiente juego: inicialmente la abeja escoge uno de los puntos y lo pinta de rojo, a continuación la mosca elige uno de los puntos no pintados y lo pinta de azul. Después la abeja elige un punto no pintado y lo pinta de rojo y a continuación la mosca elige uno no pintado y lo pinta de azul y así se alternan. Si al final del juego hay un triángulo equilátero con sus vértices rojos, la abeja gana, de lo contrario gana la mosca. Determine cuál de los dos insectos tiene una estrategia ganadora.

Solución.

(a) Primero hay que probar que los únicos triángulos equiláteros son los siguientes:



(b) Numeramos los vértices de los triángulos rojos por Ai y los vértices de los triángulos negros por Bj como se muestra en la figura siguiente:



(c) Ahora formamos los pares de vértices siguientes:

$$\{(A1, A2), (A3, A4), \ldots, (A7, A8)\}$$
$$\{(B1, B2), (B3, B4), \ldots, (B7, B8)\}$$
$$\{(A9, B9)\}$$

La mosca tiene la estrategia ganadora siguiente: Cada vez que juega la abeja la mosca elige en la movida siguiente el vértice correspondiente del par a que pertenece el vértice elegido por la mosca.

De esta manera al final del juego no habrá un triángulo equilátero con sus vértices amarillos pues cada par representa un lado de un triángulo equiláteros y por estrategia todo lado tendrá sus extremos de diferente color.

NIVEL MENOR

Problema 4 Una caja contiene 15 lapices rojos, 13 lapices azules y 8 lapices verdes. Se le pide a Constanza sacar una cantidad de lapices de la caja con los ojos vendados. ¿Cuál es la cantidad mínima de lapices que Constanza debe sacar de tal manera de asegurarse que obtiene al menos 1 rojo, 2 azules y 3 verdes ?

Solución.
Asumamos que se han extraído 31 lapices a lo menos. Si es así se tiene lo siguiente:

(Verdes) Para los verdes se debe tener que:

$$31 \leq r + a + v \leq 15 + 13 + v \Longrightarrow v \geq 3\,.$$

Esto prueba que al sacar 31 lápices de la caja habrá al menos 3 verdes. Luego se satisface el requerimiento.

(Azules) Para los azules e cumple que

$$31 \leq r + a + v \leq 15 + a + 8 \Longrightarrow a \geq 8 \Longrightarrow a \geq 2\,.$$

Luego,se cumple para los azules.

(Rojos) Los rojos deben ser al menos 1,

$$31 \leq r + a + v \leq r + 13 + 8 \Longrightarrow r \geq 10 \Longrightarrow r \geq 1$$

y por lo tanto se cumple lo pedido.

Ahora debemos probar que 31 es la cantidad mínima, para ello basta mostrar una distribución de 30 lápices que no cumpla el requrimiento.

La distribución

$$r = 15\,, \qquad a = 13\,, \qquad v = 2\,.$$

suma 30 lápices y no se cumple la condición de al menos tres verdes.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MENOR

Problema 5 Llamemos P a un polígono regular de 12 lados. ¿Cuántos triángulos es posible formar usando los vértices de P ? ¿Cuántos de ellos son triángulos escalenos?

Solución.

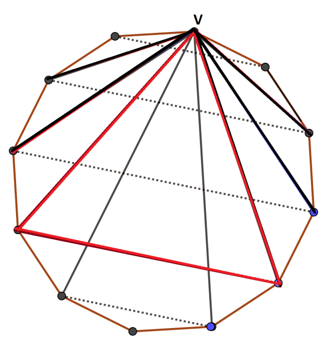
La cantidad total de triángulos a formar corresponde a cómo elegir tres puntos sin repetición de una tal muestra de 12.

Aplicando las reglas de combinatoria, ello corresponde al número

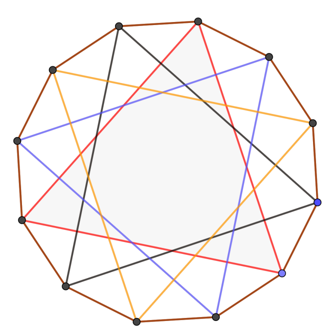
$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$$

De esta cantidad debemos restar los triángulos isósceles.

Observando la figura siguiente, los triángulos isósceles asociados a un vértice V del dodecágono son 5.



Sin embargo excluímos al equilátero, de estos solo hay cuatro.



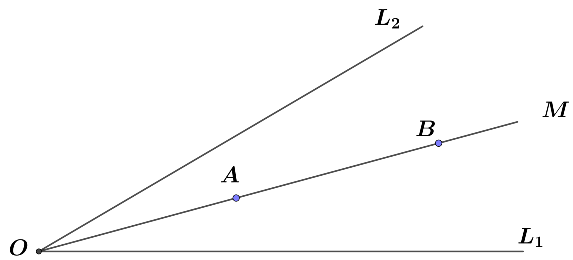
Por lo tanto la cantidad de triángulos escalenos es

$$220 - 12 \cdot 4 - 4 = 168\,.$$

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MENOR

Problema 6 Considere dos rectas L_1, L_2 que se cortan en el punto O y sea M la bisectriz del ángulo que forman, como muestra la figura siguiente:

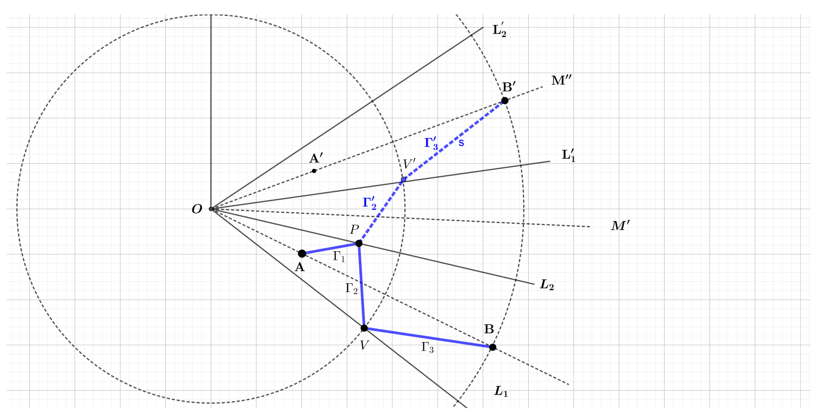


Se fijan puntos A y B en M de tal forma que $OA = 8$ y $OB = 15$ y el ángulo L_1OL_2 mide 45 grados. Calcule la longitud del camino más corto posible de A hasta B tocando a las líneas L_1 y L_2.

Solución.

Consideramos un camino Γ de A hasta B que toca los rayos L_1 y L_2. Sin pérdida de generalidad, digamos que Γ toca a L_2 primero en un punto P, y sea $V \in L_1$ el punto donde Γ toca por primera vez el rayo L_1.

Escribimos el camino Γ como $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ según los tramos $A \to P$, $P \to V$ y $V \to B$.



Trazamos los rayos L_1', L_2' y M'' desde O, cumpliendo que L_1' y L_2' son simétricos sobre L_2; L_2 y L_2' son simétricos sobre L_1'; y M'' es bisectriz de $\angle L_1'OL_2'$.

Así, los ángulos $\angle L_2OL_1'$ y $\angle L_1'OL_2'$ miden 45°.

Sobre M'' marcamos el punto B' de modo que $OB' = 15$.

Sea $V' \in L_1'$ el punto simétrico a V sobre el eje de simetría L_2.

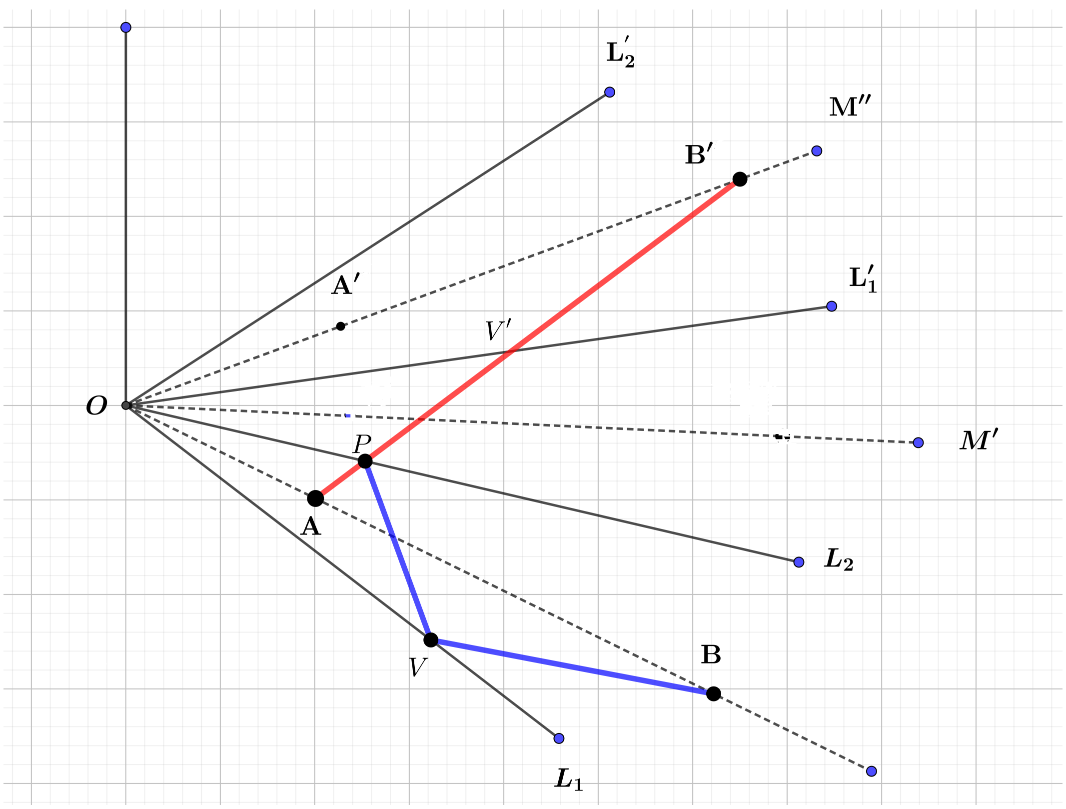
Llamemos Γ_2', Γ_3' los caminos simétricos a Γ_2, Γ_3 sobre L_2 respectivamente como muestra la figura.
Observamos que $\Delta = \Gamma_1 \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_3'$ es un camino desde A hasta B' que pasa primero por P y luego por V'.

Dado que simetrías preservan longitud, el camino Δ mide lo mismo que el camino Γ.

El camino más corto desde A hasta B' es la longitud del segmento recto que los une, y como el triángulo AOB' es rectángulo en O obtenemos que

$$\overline{AB'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB'}^2 = 8^2 + 15^2 = 17^2.$$

por lo tanto Γ mide al menos 17.



Por otro lado, la construcción anterior hecha en el orden inverso y eligiendo como Δ el segmento recto AB', nos permite construir un camino desde A hasta B como se pide, y con longitud 17.

Por lo tanto, la longitud mínima posible es 17.