XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

Problema 1 ¿Es posible elegir cinco números enteros positivos distintos de modo que la suma de cualesquiera de tres de ellos es un número primo?

Solución. El argumento se basa en la aritmética módulo 3.

Llamemos por $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$, las respectivas clases residuales. Recordemos la tabla de la suma módulo 3. Esto es:

$$\begin{array}{lll} \bar{0}+\bar{0}=\bar{0} \quad , & \bar{0}+\bar{1}=\bar{1} \quad , & \bar{0}+\bar{2}=\bar{2} \\ \bar{1}+\bar{1}=\bar{2} \quad , & \bar{1}+\bar{2}=\bar{0} \quad , & \bar{2}+\bar{2}=\bar{1} \end{array}$$

Cada uno de los cinco números elegidos pertenece a alguna clase residual.

De la tabla se deduce que la suma de tres elementos de una misma clase es 0 módulo 3,

$$\bar{0}+\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}\,, \quad \bar{1}+\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}\,, \quad \bar{2}+\bar{2}+\bar{2}=\bar{0}\,.$$

y que la suma de tres elementos, uno en cada clase, es tambi'n cero módulo 3, es decir,$\bar{0}+\bar{1}+\bar{2}=\bar{0}$.

Observemos que si la suma de tres de ellos está en $\bar{0}$ ella no representa un número primo puesto que el único primo divisible por 3 es 3 y la suma de tres de ellos es siempre mayor o igual que 6 puesto que deben ser distintos y positivos.

Ahora calculamos las posibilidades que se pueden dar:

- **Caso 1** De los cinco números hay al menos uno de cada clase.
  La suma de esos tres sería de la clase $\bar{0}$, por lo tanto la suma correspondiente no es primo.

- **Caso 2** Queda la posibilidad que los cinco números se repartan en dos clases, $\bar{a}, \bar{b}$.
  No importa la distribución realizada, una de las clases contendrá tres números, lo cual produce que la suma está en $\bar{0}$, es decir, múltiplo de 3, luego la suma no es primo.

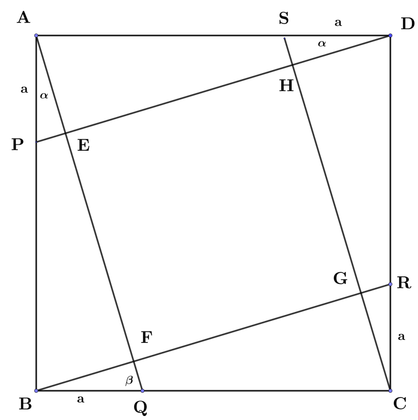
Resumiendo, no es posible encontrar cinco números con la propiedad requerida.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

Problema 2 Considere $ABCD$ un cuadrado de lado 1. Se eligen puntos P, Q, R, S en los lados AB, BC, CD y DA respectivamente de tal manera que $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a$, con $a < 1$. Se trazan los segmentos AQ, BR, CS y DP. Calcule el área del cuadrilátero que se forma en el centro de la figura.

Solución.
Miremos la figura



Es claro que $\alpha + \beta = 90^o$ lo cual implica que $\langle E = 90^0$. De igual forma se obtiene que $\langle F = 90^0$, $\langle G = 90^0$ y $\langle H = 90^0$.

Los triángulos APE, BQF, CRG, DSH son congruentes por ALA. Luego $|EF| = |FG| = |GH| = |HE|$ y entonces $EFGH$ es un cuadrado.

Por Pitágoras: $|AQ| = \sqrt{1 + a^2}$.

Además los triángulos $\triangle APE$, $\triangle AQB$ son congruentes. Entonces

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow AE = \frac{a}{1+a^2} \quad , \quad \frac{PE}{QB} = \frac{AP}{AQ} \Longrightarrow PE = \frac{a^2}{1+a^2}$$

Luego el lado del cuadrado es

$$l = \sqrt{1+a^2} - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} .$$

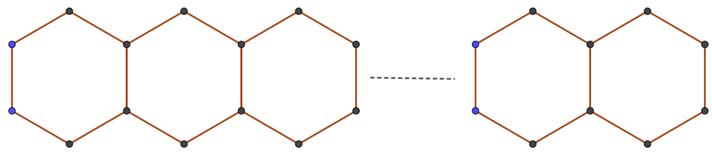
Por lo tanto el área A del cuadrado $EFGH$ es

$$A = \frac{(1-a)^2}{1+a^2}$$

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

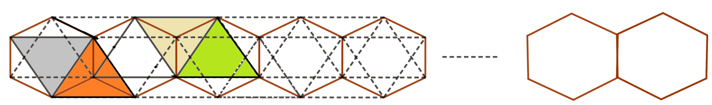
Problema 3 Con 2018 puntos se forma una red compuesta por hexagonos como muestra la figura:



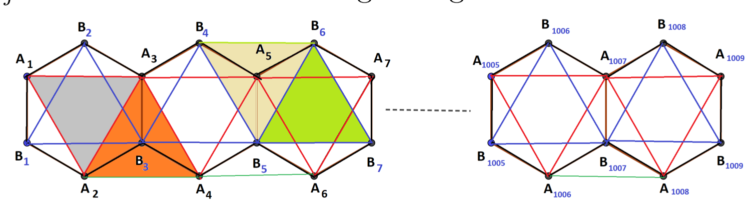
Una abeja y una mosca juegan el siguiente juego: inicialmente la abeja escoge uno de los 2018 puntos y lo pinta de rojo, a continuación la mosca elige uno de los 2017 puntos no pintados y lo pinta de azul. Después la abeja elige un punto no pintado y lo pinta de rojo y a continuación la mosca elige uno no pintado y lo pinta de azul y así se alternan. Si al final del juego hay un triángulo equilátero con sus vértices rojos, la abeja gana, de lo contrario gana la mosca. Determine cuál de los dos insectos tiene una estrategia ganadora.

Solución.

(a) Primero se observa que se realizan 504 hexágonos con estos 2018 puntos. Se prueba que los únicos triángulos equiláteros son los siguientes:



(b) Numeramos los vértices de los triángulos rojos por A_i y los vértices de los triángulos negros por B_j como se muestra en la figura siguiente:



Ahora formamos los pares de vértices siguientes:

$$\{(A_1, A_2), (A_3, A_4), \ldots, (A_{1007}, A_{1008})\}$$
$$\{(B_1, B_2), (B_3, B_4), \ldots, (B_{1007}, B_{1008})\}$$
$$\{\ (A_{1009}, B_{1009})\}$$

La mosca tiene la estrategia ganadora siguiente: Cada vez que juega la abeja la mosca elige en la movida siguiente el vértice correspondiente del par al que pertenece el vértice elegido por la mosca.

De esta manera al final del juego no habrá un triángulo equilátero con sus vértices rojos pues cada par representa un lado de un triángulo equiláteros y por estrategia todo lado tendrá sus extremos de diferente color.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

Problema 4 Encuentre todos los enteros positivos n tal que

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = n^2$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa el mayor entero menor que el número real x.

Solución.

Para $n = 12k$ con k un entero, la ecuación se transforma en

$$6k \cdot 4k \cdot 3k = 144\, k^2$$

Como k es mayor o igual que 1, se puede simplificar la ecuación quedando: $24k = 48$. Luego, la solución para números enteros de la forma $n = 12k$ es una sola y es $n = 24$.

Aseguramos que no hay más. Recordemos que para todo número real $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Resolvamos la desigualdad

$$x^2 \leq \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{24}$$

Como $x \neq 0$ se obtiene que la solución es $24 \leq x$.

Además por propiedad de la parte entera se tiene que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq \frac{x}{2} - \frac{1}{2}; \quad \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \geq \frac{x}{3} - \frac{2}{3}; \quad \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \geq \frac{x}{4} - \frac{3}{4}.$$

También tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&\leq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \\
&= x^2
\end{aligned}$$

Equivalentemente

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 24x^2 \Rightarrow x^3 - 30x^2 + 11x - 6 \leq 0\,.$$

La solución es $x < 30$.

Resumiendo, la solución x debe estar: $24 \leq x \leq 29$.

Para $x = 25; 26; 27; 28;$ la expresion $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor$ lleva a: $13 \cdot 8 \cdot 6$; $13 \cdot 9 \cdot 6$; $14 \cdot 9 \cdot 7$ que no sirven , por lo tanto la única solución es 24.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

Problema 5 Considere el conjunto Ω formado por los veinte primeros números naturales, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Se dice que un subconjunto A no vacío de Ω es *suma libre* si para todo par de elementos $x, y \in A$, la suma $(x + y)$ no está en A, (x puede ser igual a y). Pruebe que Ω tiene a lo menos 2018 subconjuntos *suma libre*.

Solución.

Se sabe que la cantidad de subconjuntos no vacíos de un conjunto finito de n elementos es $2^n - 1$.

Eligiendo cualquier subconjunto no vacío de $\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$ obtenemos un conjunto suma-libre, pues suma de impares es par y se sale del conjunto. Eso nos da $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ subconjuntos suma libre de Ω.

Eligiendo cualquier subconjunto no vaciío de $\{11, 12, ..., 20\}$ obtenemos un conjunto suma-libre puesto que sumas de elementos dan resultados mayor que 20. Eso nos da $2^{10} = 1024 - 1 = 1023$ subconjuntos suma libre de Ω.

Las dos construcciones anteriores lamentablemente dan algunos conjuntos repetidos. Para ser precisos, los subconjuntos de $\{11, 13, 15, 17, 19\}$ aparecen en ambas construcciones, y solamente ellos. Estos son $2^5 - 1 = 31$ conjuntos.

Por lo tanto, hasta ahora tenemos un total de

$$1023 + 1023 - 31 = 2015$$

conjuntos suma-libre.

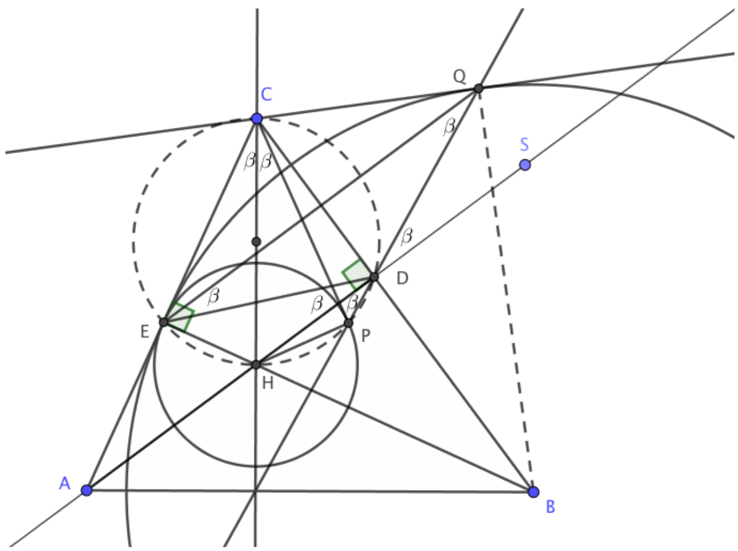
Notamos que los conjuntos $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{10\}$ son cinco ejemplos más de conjuntos suma-libre, y no fueron usados en las construcciones anteriores. Esto nos da un total de $2015 + 5 = 2020$ conjuntos *suma libre*, lo cual es suficiente para lo pedido.

XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2018

NIVEL MAYOR

Problema 6 Considere un triángulo acutángulo ABC y sus alturas desde A y B que intersectan a los lados respectivos en D y E. Llamemos H al punto de intersección de las alturas. Se construye la circunferencia con centro en H y radio HE. Desde C se traza una recta tangente a la circunferencia en el punto P. Con centro en B y radio BE se traza otra circunferencia y desde C se traza una otra recta tangente a la esta circunferencia en el punto Q. Demuestre que los puntos D, P y Q son colineales.

Solución.



La siguiente prueba de colinealidad está basada en argumentos principalmente angulares. Unamos P con D y D con Q. Los segmentos CQ y CE son tangentes desde C a la circunferencia de centro en B y radio BE luego tienen igual medida, es decir $CQ = CE$ además $BE = BQ$ por ser radios. Por lo anterior los puntos C y B estan en la simetral del trazo EQ, de donde EQ es perpendicular a BC.

Prolonguemos la altura AD mas allá de D, sea S un punto en esta prolongación como en la figura. Las rectas EQ y AD son paralelas porque ambas son perpendiculares a BC. Por lo anterior, los ángulos EQD y QDS miden lo mismo, llamemos a esta medida β. Se sigue que los ángulos QED y EDH miden también β.

Como CP es tangente a la circunferencia de centro H y radio HE, se sigue que los puntos E, H, P, D y C son concíclicos. Por lo anterior el ángulo ECH mide β. Como los triángulos HCE y HCP son congruentes el ángulo HCP mide β. Finalmente el ángulo inscrito HDP mide también β. Al ser los ángulos opuestos HDP y QDS de igual medida y la recta AD fija los puntos se concluye que P, D y Q son colineales.