

**Prueba de selección Chilena para la
Olimpiada de Países del Cono Sur 2008**

Nombre

Problema 1. Sea M el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y suponemos que la circunferencia circunscrita BMA intersecta al segmento BC en P y al AC en Q . Demostrar que la recta CM es perpendicular a PQ .

Problema 2. Edmundo propone el siguiente método para generar el *dígito verificador* del RUN de una persona:

Multiplicar, de derecha a izquierda, cada dígito del RUN consecutivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3, \dots , sumar luego los resultados de estas multiplicaciones y considerar el resto de la división de este resultado por 11. Manuel define el dígito verificador como la diferencia entre 11 y este último resultado.

Ejemplo: RUN: 11222333. La suma de las multiplicaciones consecutivas da

$$3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 + 2 \times 7 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 68.$$

El resto de 68 para la división por 11 es 2. El dígito verificador propuesto por Edmundo es entonces $11 - 2 = 9$.

Por su parte, Carolina plantea el siguiente método alternativo:

Multiplicar, de derecha a izquierda, cada dígito del RUN consecutivamente por 9, 8, 7, 6, 5, 4, 9, 8, \dots , sumar luego los resultados de estas multiplicaciones y considerar la *suma alternada* de los dígitos de este resultado como el dígito verificador.

Ejemplos: La suma alternada de 423 es $3 - 2 + 4 = 5$.

RUN: 11222333. La suma de las multiplicaciones consecutivas da

$$3 \times 9 + 3 \times 8 + 3 \times 7 + 2 \times 6 + 2 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 9 + 1 \times 8 = 119.$$

La suma alternada es $9 - 1 + 1 = 9$. De esta manera el dígito verificador propuesto por Carolina es 9.

Note que en estos ejemplos ambos resultados coincidieron. Demuestre que los métodos propuestos por Edmundo y Carolina siempre arrojan el mismo resultado para cualquier RUN.

Problema 3. Determine todos los enteros positivos x tales que $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 3x + 11$ es un cuadrado perfecto.

Tiempo: 2 horas
No puede usar calculadora.