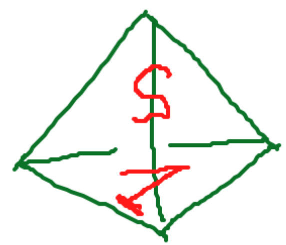
"Lema de Burnside" (conteo con simetrías)

0. Idea: Si hay simetrías, las posibilidades se reducen (a veces drásticamente)

Ej motivador:

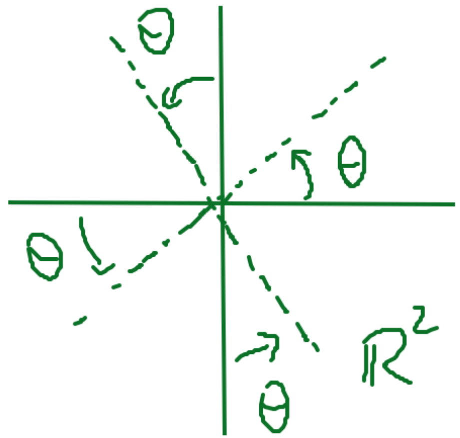


¿cuántos dados tetraedrales hay?

(Sin simetría: $4! = 24$, con simetría: 2)

1. Grupos $\longleftrightarrow$ Simetrías

Ej:



{rotaciones en torno al origen}

R_θ rotación en un ∡ θ

① $R_\theta \circ R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$ (componer rotaciones da rotaciones)

② La composición es asociativa

$$R_\alpha \circ (R_\beta \circ R_\gamma) = (R_\alpha \circ R_\beta) \circ R_\gamma$$

$$\text{"} \quad R_{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{"}$$

③ R_0 = no rotar (identidad)

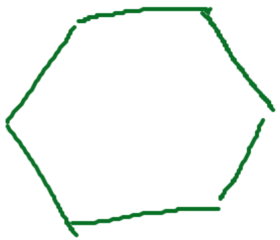
④ R_θ dada, $\exists$ R_α tal que

$$R_\theta \circ R_\alpha = R_\alpha \circ R_\theta = R_0$$

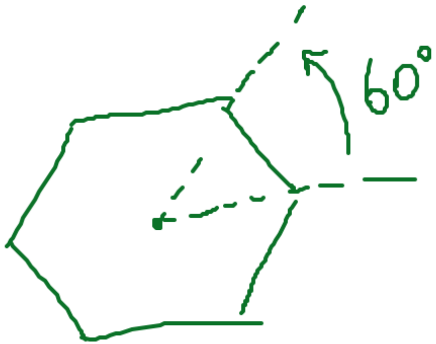
$$(\alpha = -\theta,\ 2\pi - \theta,\ 360^\circ - \theta)$$

Obs: Hay algo más $R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha$ pero <u>no</u> es algo que se le pide a un grupo en general.

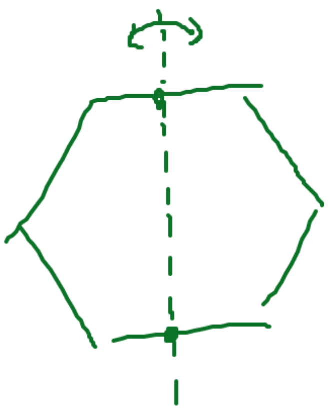
Ej

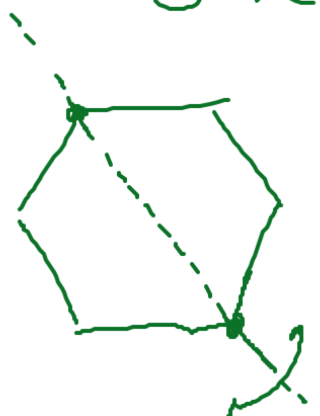


hexágono regular: ¿simetrías?

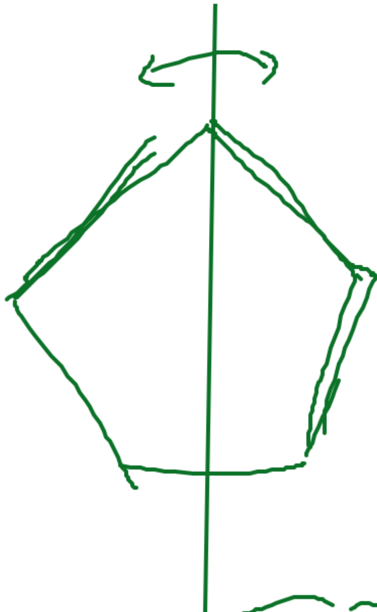


- 6 rotaciones (contando la identidad)
- 3 reflexiones con vértices fijos
- 3 reflexiones con ejes fijos



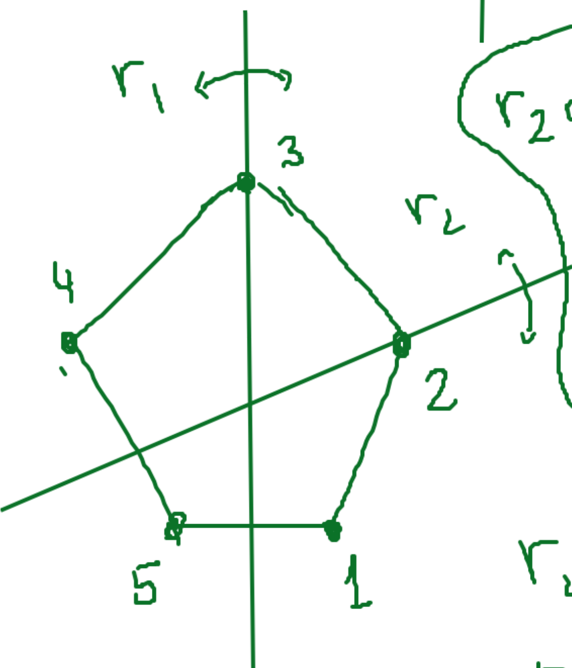


Ej



Pentágono regular (con fe)

- 5 rotaciones (contando la identidad)
- 5 reflexiones geométricas. iguales: preservan 1 vértice & 1 eje (lado)



$r_2 \circ r_1$ " rot. en 216°

$r_2 \circ r_1(1) = 4$

$r_2 \circ r_1(2) = 5$

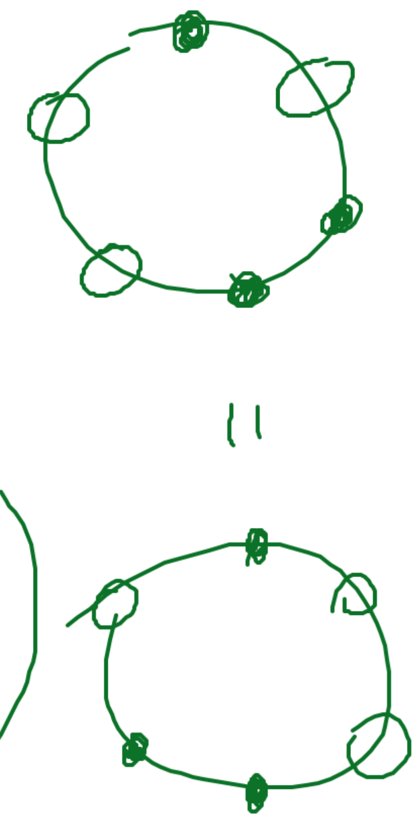
$r_2 \circ r_1(3) = \underline{1}$

$r_2 \circ r_1(4) = 2$

$r_2 \circ r_1(5) = 3$

__Pregunta__: Te doy 6 cuentas de n colores para hacerle una pulserita a tu hermana

¿Cuántas pulseritas puedes hacer?

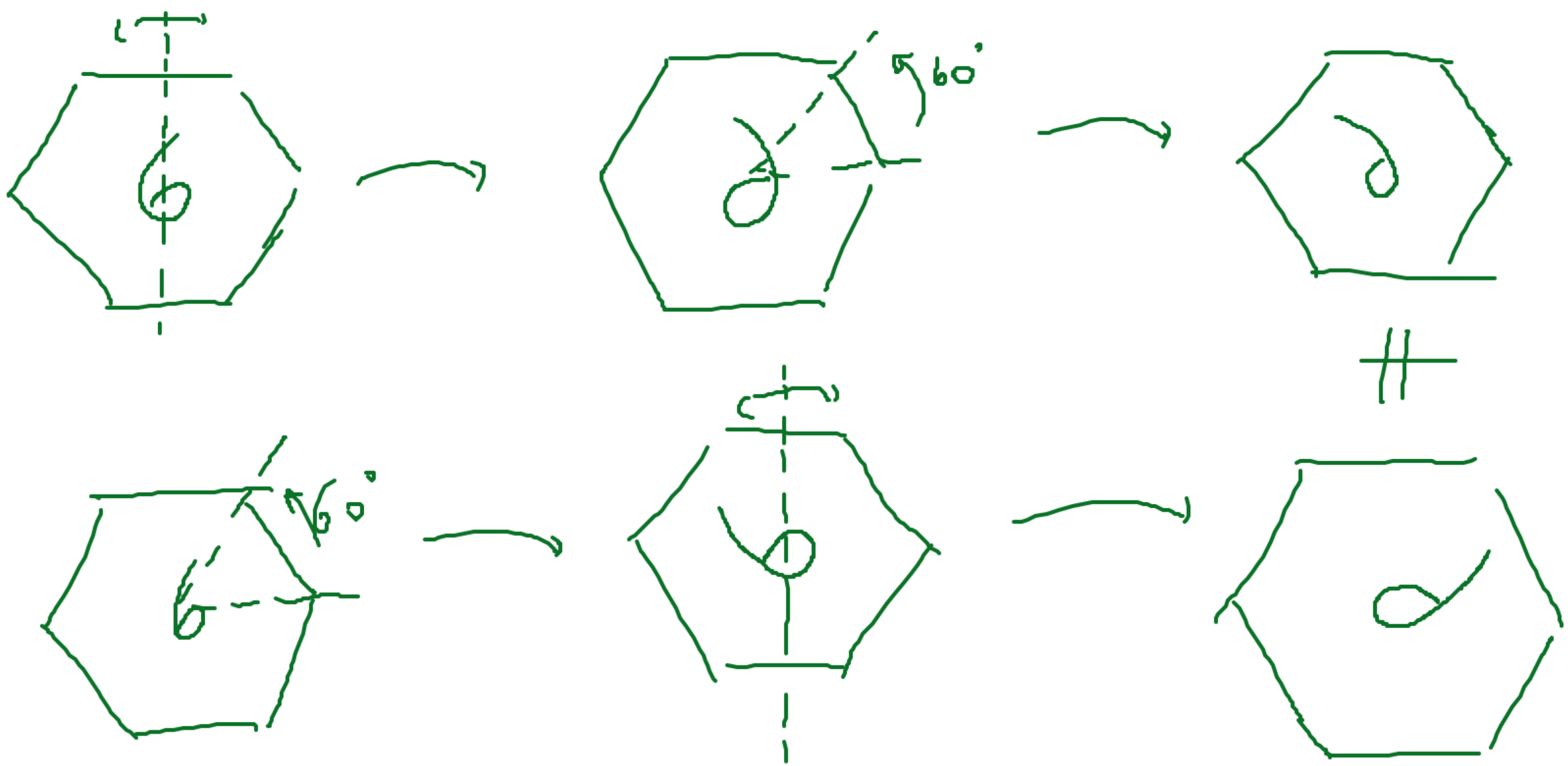


($\underline{n = 6}$ |

Sin simetrías: $6^6 = 46656$

Con simetrías: 4291)

Obs: El grupo de simetrías del hexágono regular **no** es conmutativo



2. <u>Acciones</u>: G grupo "actúa" sobre un objeto X si cada elemento de G corresponde a una simetría de X &

- la identidad no hace nada
- componer en G es lo mismo que componer simetrías

<u>Ej</u> Simetrías del pentágono regular actúan en la estrella de la bandera

Obs: Manera abstracta de definir grupos

$G \neq \emptyset$ conjunto no vacío

$g, h \in G \rightsquigarrow g * h$ "operación en G"

- Clausura: $g * h \in G$
- Asociatividad: $g * (h * f) = (g * h) * f$
- Neutro: existe $e \in G$ tal que

$$g * e = e * g = g$$

- Inversos: para $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$

tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

Ej: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{C},+)$

$(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$

simetrías de un n-ágono,

rotaciones tetraedro, etc...

Teorema: $$\#\,\text{pulseritas} = \frac{\displaystyle\sum_{s \text{ simetría}} \#\,\text{pulseritas fijas por } s}{\#\,\text{simetrías}}$$

(Lema de Burnside)

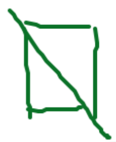
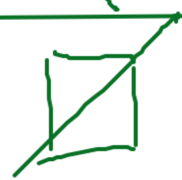
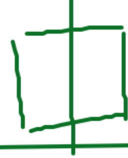
Ej

$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ cuentas} \\ 2 \text{ colores} \end{array}\right\}$  $\rightsquigarrow$ G = simetrías del cuadrado

$\#G = 4 + 4 = 8$

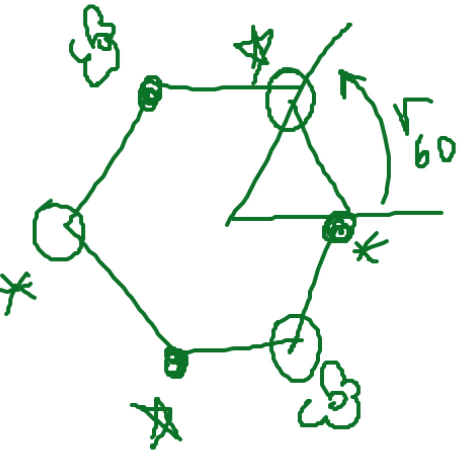
X = todas las pulseras sin contar simetría

$(= 2^4 = 16)$

e	2^4
rot 90°	2
rot 180°	4
rot 270° = rot -90°	2
ref 	8
ref 	8
ref 	4
ref 	4

$$\frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{48}{8} = 6$$



Hexágono

6 colores

$$\# X = 6^6$$

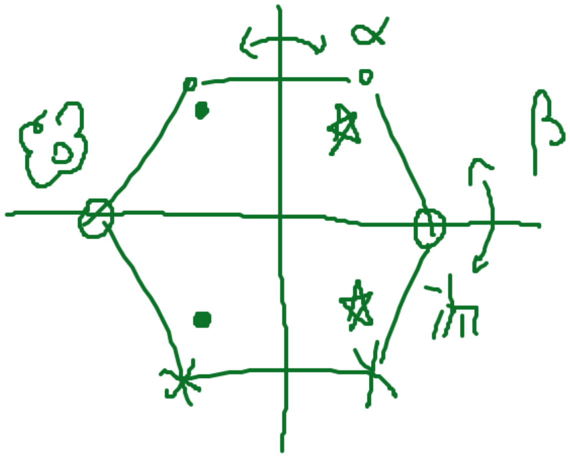
$$\# \mathrm{Fix}(e) = 6^6$$

$$\# \mathrm{Fix}(r_{60}) = \# \mathrm{Fix}(\underbrace{r_{300}}_{= -60}) = 6$$

$$\# \mathrm{Fix}(r_{120}) = \# \mathrm{Fix}(r_{240}) = 6^2$$

$$\# \mathrm{Fix}(r_{180}) = 6^3$$

Sólo rotaciones $= \frac{1}{6}\left(6^6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6^2 + 6^3\right) = 7826$



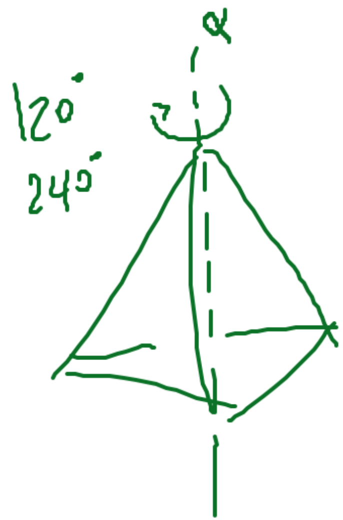
$$\#\mathrm{Fix}(\alpha) = 6^3 \rightsquigarrow 3\ \alpha_s$$

$$\#\mathrm{Fix}(\beta) = 6^4 \rightsquigarrow 3\ \beta_s$$

Con rot. & ref $= \frac{1}{12}\left(6^6 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6 + 6^3 + 3\cdot 6^3 + 3\cdot 6^4\right)$

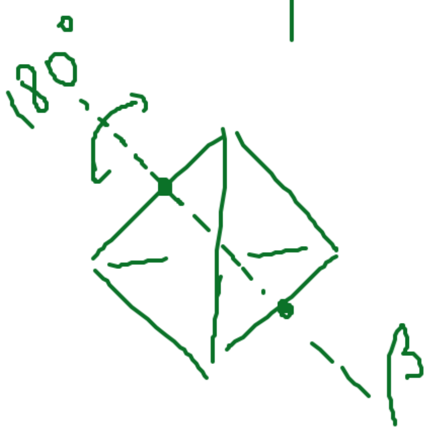
$= 4291$

Tarea: El tetraedro regular tiene 12 rotaciones



8 α_s (dos por cada vértice)

+ identidad



3 β_s

Use el lema de Burnside para ver que hay 2 dados tetraedrales

$$\# \mathrm{Fix}(e) = 4!$$

$$\# \mathrm{Fix}(\alpha) = \# \mathrm{Fix}(\beta) = 0$$

$$\frac{1}{12} \cdot 4! = 2$$

Hágalo para el hexaedro (son 24 rot)