OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2012

NIVEL MENOR

Prueba Final
Viernes 26 de octubre

Problema 1. Encuentre un número natural N de manera tal que la suma de los dígitos de N sea 100 y la suma de los dígitos de $2N$ sea 110.

Problema 2. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que debe realizar un caballo de ajedrez, en un tablero de 8×8, para llegar al casillero superior derecho comenzando en el inferior izquierdo? Recuerde que el caballo se mueve de la manera habitual en forma de L.

Problema 3. Sobre un mundo plano e ilimitado, un caminante realiza un recorrido obedeciendo las siguientes reglas:

- Camina describiendo segmentos de recta.
- Estos segmentos se alternan entre dos tipos de segmentos: segmentos en dirección Norte y segmentos en cualquier dirección distinta a la dirección Sur. Es decir, comienza recorriendo un segmento en dirección Norte, luego realiza uno en dirección distinta a la dirección Sur, luego otro segmento en dirección Norte, y continua así de manera alternada.

Demuestre que si el caminante consigue volver al punto de partida entonces necesariamente debe existir otro punto del plano por el cual el recorrido pasa más de una vez.

Problema 4. En una pared se encuentran tres relojes, todos marcando las doce en punto. El primero de ellos se retrasa 2 minutos por día, el segundo se retrasa 5 minutos por día, mientras que el tercero se encuentra detenido. Si cada reloj avanza a velocidad constante, calcule cuánto tiempo transcurrirá antes de que los tres relojes vuelvan a marcar la misma hora.

Tiempo: 4 horas.

OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 2012
NIVEL MAYOR
Viernes 26 de octubre

Problema 1. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que debe realizar un caballo de ajedrez, en un tablero de 8×8, para llegar al casillero superior derecho comenzando en el inferior izquierdo? Recuerde que el caballo se mueve de la manera habitual en forma de L.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ todos los números enteros positivos con 2012 cifras o menos, de las cuales ninguna es un 9. Probar que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 80.$$

Problema 3. Una persona ingresa a la red social facebook. Se hace amigo de al menos una persona al día durante los primeros 30 días. Al cabo de esos 30 días se ha hecho exactamente 45 amigos. Demostrar que existe una sucesión de días consecutivos donde se hizo de exactamente 14 amigos.

Problema 4. Considere un triángulo isósceles ABC, donde AB=AC. D es un punto en el lado AC y P un punto en el segmento BD de manera que el ángulo $APC = 90°$ y $\angle ABP \cong \angle BCP$. Determinar la razón $AD : DC$.

Tiempo: 4 horas.