XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

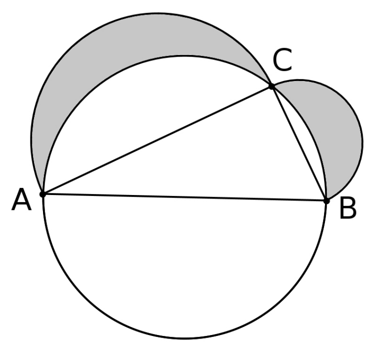
Nivel Menor

Primera prueba de clasificación, 25 de Agosto de 2012

SOLUCIONES, Comisión Académica

Problema 1. La figura muestra al triángulo ABC, rectángulo en C, su circunferencia circunscrita y semicírculos construidos sobre los dos catetos.

Si $AB = 5$, $AC = 4$ y $BC = 3$, calcule la suma de las áreas de las dos regiones sombreadas.



Solución. Como $\angle ACB = 90$ se tiene que AB es un diámetro del círculo circunscrito. El área sombreada mide el área de los dos semicírculos sobre los catetos, más el área del triángulo, menos el área del semicírculo sobre la hipotenusa:

$$\begin{aligned} \text{Area sombreada} &= \frac{\pi}{2}4^2 + \frac{\pi}{2}3^2 + \frac{1}{2}4 \cdot 3 - \frac{\pi}{2}5^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(4^2 + 3^2 - 5^2\right) + \frac{1}{2}4 \cdot 3 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Problema 2. Encuentre la mayor potencia de 3 que divide a $10^{2012}-1$.

Solución. El número $10^{2012}-1$ consta de 2012 nueves. Luego $10^{2012}-1$ es divisible por $9=3^2$ y

$$\frac{10^{2012}-1}{9}=\underbrace{111111\ldots1111}_{2012\text{ veces}}.$$

Este último número no es divisible por 3, pues la suma de sus dígitos es 2012, que no es divisible por 3. Deducimos finalmente que 3^2 es la mayor potencia de 3 que divide a $10^{2012}-1$.

Problema 3. ¿ De cuántas maneras diferentes puede cubrirse un tablero de 2×20 casillas de 1×1, con piezas de dominó de 2×1, de manera que las piezas no se sobrepongan ni sobresalgan del tablero?

Solución. Probemos casos particulares:

- para un tablero de 2×1, hay 1 manera,
- para uno de 2×2 hay 2 maneras,
- en uno de 2×3, las dos primeras casillas (2×1) pueden ser cubiertas de dos formas: con una sola pieza (que cubre el subtablero de 2×1) o con dos que a su vez cubren un subtablero de 2×2. En el primer caso sobra un subtablero de 2×2 para el cual hay 2 maneras de cubrir, y en segundo, sobra un subtablero de 2×1 para el cual hay 1 manera. En total son $2+1=3$ maneras.
- Siguiendo el mismo razonamiento, el tablero de 2×4 se puede cubrir de $2+3=5$ maneras, pues las dos primeras casillas se pueden cubrir de dos maneras distintas, y para cada una de ellas sobra un tablero de 2×2 o de 2×3.
- Así, un tablero de 2×5 se puede cubrir de $3+5=8$ maneras. Continuamos:
- Tablero de 2×6 de $5+8=13$ maneras.
- Tablero de 2×7 de $8+13=21$ maneras.
- Tablero de 2×8 de $13+21=34$ maneras.
- $\vdots$
- Tablero de 2×20 de $4181+6765=10946$ maneras.

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Segunda prueba de clasificación, 25 de Agosto de 2012

SOLUCIONES, Comisión Académica

Problema 4. En un cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.
2. Si un montón tiene un número par de piedras, se puede dividir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.

Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y otro tiene 51. Determine si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas 1. y 2., que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra.

Solución. En el primer movimiento tenemos que juntar dos de los tres montones de piedras pues ninguno tiene una cantidad par. Si en el primer movimiento juntamos los montones de 51 y 49, en el siguiente paso la cantidad de piedras en cada montón será múltiplo de 5. Como las operaciones posibles son sumar dos montones o dividir uno por 2, las cantidades de los montones en los siguientes pasos serán nuevamente todos múltiplos de 5; de esta manera será imposible conseguir montones de una sola piedra haciendo estas operaciones.

En las otras dos posibilidades para el primer movimiento los montones que resultan son, o ambos múltiplos de 3, o ambos múltiplos de 7, así que, por el mismo argumento, no es posible llegar a montones con una sola piedra.

Problema 5. A cada vértice de un cubo se le asigna el valor $+1$ ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Solución. Si en un vértice está el número a, entonces dicho número aparece como factor en los productos de las tres caras que lo contienen como vértice. Luego, el producto de los 14 números es una cuarta potencia, entoces es igual a 1. De los 14 números hay un número par de -1's, digamos que hay P valores -1's. Luego deben haber $14-P$ números 1's. Si S es la suma de los 14 números tenemos que $S = P\times(-1)+(14-P)\times 1 = 14-2P$.

Como P es par, resulta que los valores posibles de S serían (tomado $P = 14, 12, \ldots, 0$):

$$-14, -10, -6, -2, 2, 6, 10 \text{ y } 14.$$

El $S = -14$ no se logra, ya que no pueden ser negativos todos los números (si todos los vértices son negativos, entonces las 4 caras son positivas , $S = -2$).

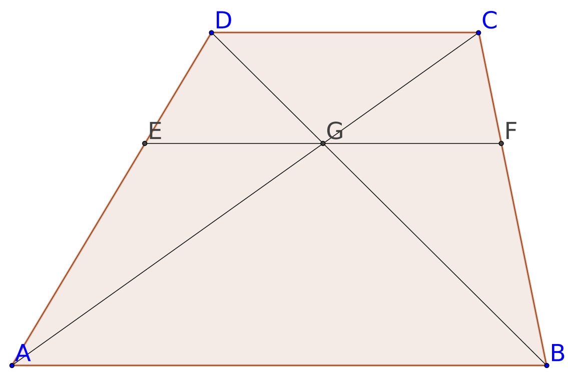
El $S = 10$ no se obtiene, ya que entonces debe haber 2 valores negativos lo cual no es posible: si hay 1 vértice negativo, hay 3 caras negativas ($S = 6$), y si hay 2 vértices negativos, hay 2 caras negativas (vértices adyacentes, $S = 6$), o bien 4 caras negativas (vértices no adyacentes pero en una misma cara, $S = 2$) o bien 6 caras negativas (vértives diametralmente opuestos, $S = -2$).

El $S = 14$ se obtiene con todos los vértices positivos, el $S = -10$ se obtiene con dos vértives positivos diametralmente opuestos (todas las caras son negativas y $P = 12$). Finalmente, si hay un sólo vértice positivo, hay 3 caras negativas y 3 positivas, luego $P = 10$ y $S = -6$.

Por lo tanto los posibles valores son $-10, -6, -2, 2, 6, 14$.

Problema 6. El cudrilátero de la figura es un trapecio, y se tiene que $EF \parallel AB \parallel CD$. Además, EF pasa por el punto G, dónde se intersectan de las diagonales AC y BD.

Se sabe que las longitudes de AB y CD son, respectivamente, 12 y 4. Calcule la longitud de EF.



Solución. Los triángulos $\triangle ABG$ y $\triangle CDG$ son semejantes por criterio (AAA). Luego las siguientes relaciones se tienen:

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BG}{GD} = \frac{AB}{DC} = \frac{12}{4} = 3.$$

De aquí podemos deducir que

$$\frac{AG}{GC} = 3 \quad , \quad \frac{BG}{GD} = 3.$$

De donde concluimos que $AG = 3GC$ y $BG = 3GD$. Usando Thales en el tri—ángulo $\triangle DAC$ obtenemos

$$\frac{AG}{AG + GC} = \frac{EG}{DC}$$

Esta igualdad queda

$$\frac{3GC}{4GC} = \frac{3}{4} = \frac{EG}{4}$$

de donde vemos que $EG = 3$. Usando Thales en el triángulo $\triangle DBC$ obtenemos

$$\frac{BG}{BG + GD} = \frac{GF}{DC}$$

Esta igualdad queda

$$\frac{3GD}{4GD} = \frac{3}{4} = \frac{GF}{4}$$

de donde vemos que $GF = 3$. El segmento buscado mide $EF = EG + GF = 3 + 3 = 6$.

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Primera prueba de clasificación, 25 de Agosto de 2012

SOLUCIONES, Comisión Académica

Problema 1. Muestre que si a, b, c son números enteros impares entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene ninguna raíz racional.

Aclaración: una raíz racional para la ecuación es un número de la forma $\tilde{x} = \frac{p}{q}$, con p, q números enteros y tal que $a\tilde{x}^2 + b\tilde{x} + c = 0$.

Solución. Supongamos por contradicción que existe una raíz racional $\tilde{x} = p/q$ con $mcd(p, q) = 1$, es decir, la fracción p/q no se puede simplificar. Evaluando tenemos

$$\frac{ap^2}{q^2} + \frac{bp}{q} + c = 0,$$

lo que implica al multiplicar por q^2 que

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

Como p, q no son ambos pares (pues $mcd(p, q) = 1$), supongamos que p es impar (el otro caso es análogo). Si q es impar, entonces la suma de arriba involucra a tres números impares, luego no puede ser 0. Si q es par, entonces en la suma de arriba ap^2 es imapr mientras que $bqp + cq^2$ es par, y nuevamente la suma no puede ser 0. Esto contradice el hecho que exista una raíz racional.

Problema 2. Si k es un entero positivo, encuentre la mayor potencia de 3 que divide a $10^k - 1$.

Solución. Los siguientes resultado conocidos nos serán de utilidad:

1. La siguiente factorización se tiene
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1).$$
2. Un número natural es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos (en notación decimal) es a su vez divisible por 3. Además, un número natural es divisible por 9 si y solo si la suma de sus dígitos (en notación decimal) es a su vez divisible por 9.

Escribamos $k = 3^s r$, donde r no es divisible por 3 (así 3^s es la mayor potencia de 3 que divide a k). Conjeturamos, haciendo algunos casos particulares, que la mayor potencia de 3 que divide a $10^k - 1$ es 3^{s+2}. Vamos a probarlo:

Podemos escribir $x = 10^r$, $n = 3^s$ y la factorización de arriba queda:
$$10^k - 1 = (10^r)^{3^s} - 1 = (10^r - 1)(10^{3^s - 1} + \ldots + 1).$$

Así, vemos que $10^k - 1$ se puede factorizar en el producto de dos números, que escritos en notación decimal son
$$\underbrace{999\ldots999}_{r \text{ nueves}} \quad \times \quad \underbrace{111\ldots111}_{3^s \text{ unos}}. \tag{1}$$
El primer factor se puede factorizar
$$\underbrace{999\ldots999}_{r \text{ nueves}} = 9 \times \underbrace{111\ldots1}_{r \text{ unos}}$$
que es un número tal que la máxima potencia de 3 que lo divide es 3^2, pues la suma de los dígitos de $\underbrace{111\ldots1}_{r \text{ unos}}$ es r, que no es divisible por 3.

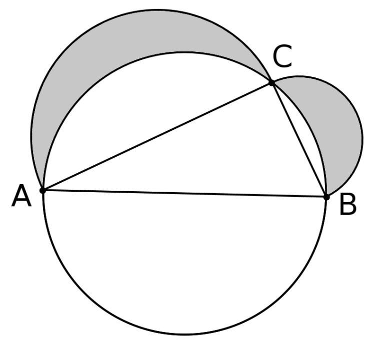
Afirmamos que la máxima potencia de 3 que divide al segundo factor en (1) es exáctamente 3^s. Demostremos esto por inducción sobre s:

- Para $s = 1$ es número es $111 = 3 \times 37$ y el resultado es válido.
- Supongamos que el resultado se tiene para $s = n$. La siguiente factorización es evidente
$$\underbrace{111\ldots111}_{3^{n+1} \text{ unos}} = \underbrace{111\ldots111}_{3^n \text{ unos}} \quad \times \quad 1\underbrace{000\ldots000}_{3^n - 1 \text{ ceros}}1\underbrace{000\ldots000}_{3^n - 1 \text{ ceros}}1.$$
Por hipótesis de inducción, la mayor potencia de 3 que divide al primer factor es 3^n, mientras que la suma de los dígitos del segundo factor es 3, luego la mayor potencia de 3 que divide a ese factor es 3^1. Concluimos que la mayor potencia de 3 que divide a $\underbrace{111\ldots111}_{3^{n+1} \text{ unos}}$ es $3^n \times 3^1 = 3^{n+1}$.

De esta manera, en (1) vemos que la mayor potencia de 3 que divide a $10^k - 1$ es 3^{s+2}.

Problema 3. La figura muestra al triángulo ABC, rectángulo en C, su circunferencia circunscrita y semicírculos construidos sobre los dos catetos.

Demuestre que la suma de las áreas de las dos regiones sombreadas es $\frac{1}{2}AC \cdot CB$.



Solución. Como $\angle ACB = 90$ se tiene que AB es un diámetro del círculo circunscrito. El área sombreada mide el área de los dos semicírculos sobre los catetos, más el área del triángulo, menos el área del semicírculo sobre la hipotenusa:

$$\begin{aligned} \text{Area sombreada} &= \frac{\pi}{2}AC^2 + \frac{\pi}{2}CB^2 + \frac{1}{2}AC \cdot CB - \frac{\pi}{2}AB^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(AC^2 + CB^2 - AB^2\right) + \frac{1}{2}AB \cdot CB. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Pitágoras vemos que el paréntesis de arriba se anula y se tiene el resultado pedido.

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Segunda prueba de clasificación, 25 de Agosto de 2012

SOLUCIONES, Comisión Académica

Problema 4. A cada vértice de un cubo se le asigna el valor $+1$ ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Solución. Si en un vértice está el número a, entonces dicho número aparece como factor en los productos de las tres caras que lo contienen como vértice. Luego, el producto de los 14 números es una cuarta potencia, entoces es igual a 1. De los 14 números hay un número par de -1's, digamos que hay P valores -1's. Luego deben haber $14-P$ números 1's. Si S es la suma de los 14 números tenemos que $S = P\times(-1)+(14-P)\times 1 = 14-2P$.

Como P es par, resulta que los valores posibles de S serían (tomado $P = 14, 12, \ldots, 0$):

$$-14, -10, -6, -2, 2, 6, 10 \text{ y } 14.$$

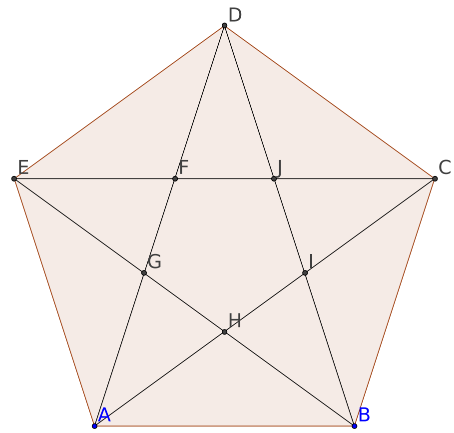
El $S = -14$ no se logra, ya que no pueden ser negativos todos los números (si todos los vértices son negativos, entonces las 4 caras son positivas , $S = -2$).

El $S = 10$ no se obtiene, ya que entonces debe haber 2 valores negativos lo cual no es posible: si hay 1 vértice negativo, hay 3 caras negativas ($S = 6$), y si hay 2 vértices negativos, hay 2 caras negativas (vértices adyacentes, $S = 6$), o bien 4 caras negativas (vértices no adyacentes pero en una misma cara, $S = 2$) o bien 6 caras negativas (vértives diametralmente opuestos, $S = -2$).

El $S = 14$ se obtiene con todos los vértices positivos, el $S = -10$ se obtiene con dos vértives positivos diametralmente opuestos (todas las caras son negativas y $P = 12$). Finalmente, si hay un sólo vértice positivo, hay 3 caras negativas y 3 positivas, luego $P = 10$ y $S = -6$.

Por lo tanto los posibles valores son $-10, -6, -2, 2, 6, 14$.

Problema 5. Considere el pentágono regular $ABCDE$ de la figura. Si BI mide 1, ¿cuánto mide AB?



Solución. Como el pentágono es regular $AE = ED$, por lo que $\angle DAE = \angle ADE$. Además, $\angle AED$ mide 108 (pues en un polígono regular de n lados cada ángulo interior mide $\frac{180(n-2)}{n}$). Así, $\angle DAE + \angle ADE = 180 - 108 = 72$, y como los dos miden lo mismo se tiene $\angle EAG = \angle DEA = 36$.Analogamente (por simetría) se tiene $\angle BAH = 36$ y por lo tanto

$$\angle GAH = \angle BAE - \angle BAH - \angle EAG = 36.$$

Continuando con este análisis de ángulos, nos damos cuenta que los triángulos ADB y BAI son semejantes y ambos isósceles. Si llamamos $x = AB$, se tiene la proporción

$$\begin{aligned} \frac{AB}{IB} &= \frac{AD}{AB} \\ \frac{x}{1} &= \frac{AF + DF}{x} \\ \frac{x}{1} &= \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

Esta igualdad da lugar a la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Las raíces son

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La primera solución no es admisible pues es negativa ($\sqrt{5} > 1$). La única opción entonces es

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un entero. Una circunferencia está dividida en $2n$ arcos por $2n$ puntos. Cada arco mide una de tres posibles longitudes y no hay dos arcos adyacentes con la misma longitud. Los $2n$ puntos se pintan alternadamente de rojo y azul. Demuestre que el n-ágono con vértices azules y el n-ágono con vértices rojos tienen el mismo perímetro y la misma área.

Solución. Sean a, b y c las longitudes de los 3 arcos. Supongamos que hay x arcos de longitud a, y arcos de longitud b y z arcos de longitud c. Entonces $x + y + z = 2n$. Cada lado del n-ágono con vértices rojos está subtendido por un arco de longitud $b + c$, $c + a$ ó $a + b$ (pues no hay dos arcos consecutivos del mismo largo). De estos n arcos, x de ellos contienen un arco de longitud a, así que el número de arcos de longitud $b + c$ es $n?x$. Análogamente, el número de arcos de longitud $c + a$ es $n?y$ y el número de arcos de longitud $a + b$ es $n?z$. Exactamente lo mismo sucede con el n-ágono con vértices azules.

Como cada arco de longitud $b+c$ determina un largo fijo para la cuerda que lo subtiende (y análogamente para los arcos de longitud $c + a$ y $a + b$) vemos que el perímetro de cada n-ágono solo depende del número de cada de estos arcos, y como es el mismo para ambos, deducimos que tienen el mismo perímetro.

Como el área de cada polígono puede calcularse de la diferencia entre el área del círculo y el área de la region circular atrapada en cada cuerda, el mismo argumento anterior nos permite deducir que ambos n-ágonos tienen la misma área.