SOCIEDAD DE MATEMATICA

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Primera prueba Final, 24 de Octubre de 2013

Problema 1. Encuentre el menor entero positivo divisible por exactamente 2013 enteros positivos distintos.

Problema 2. Encuentre todos los enteros positivos x tales que x^2+x+6 sea un cuadrado perfecto.

Problema 3. Hannibal y Clarice están en un asado y quedan tres anticuchos, cada uno de los cuales tiene 10 trozos. De los 30 trozos totales, hay 29 de pollo y uno de carne, el cual se encuentra en el fondo de uno de los anticuchos. Para decidir quién se quedará con el pedazo de carne, deciden jugar al siguiente juego: sacan alternadamente un trozo de alguno de los anticuchos (pueden sacar sólo los trozos exteriores) y gana el juego quien logra sacar el trozo de carne. Clarice decide si empieza ella o empieza Hannibal. ¿Qué le conviene decidir?

Tiempo: 3 horas.

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Segunda prueba Final, 25 de Octubre de 2013

Problema 4. Encuentre todos los pares de números primos positivos p y q tales que $p^q - q^p = 1$.

Problema 5. Cuatro puntos A, B, C, D se mueven en el espacio de modo que siempre se satisface

$$dist(A,B) = dist(A,C) = dist(D,B) = dist(D,C) = 1.$$

¿ Cuál es el mayor valor que puede asumir la suma $dist(A,D) + dist(B,C)$?

¿ En qué condiciones se maximiza esta suma ?

Problema 6. Juan debe pagar 4 cuentas. Se dirige a un cajero automático, pero no recuerda el monto de las cuentas. Sólo sabe que

1. Cada cuenta es un múltiplo de 1.000 y es al menos de 4.000.

2. Las cuentas suman 200.000.

Cual es el menor número de veces que Juan debe usar el cajero para asegurarse de poder pagar las cuentas con cambio exacto sin que le sobre dinero? El cajero tiene billetes de 2.000, 5.000, 10.000, y 20.000. Juan puede decidir cuánto dinero le pide al cajero cada vez, pero no puede decidir cuántos billetes de cada tipo le dá el cajero.

Tiempo: 3 horas.

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Primera prueba Final, 24 de Octubre de 2013

Problema 1. Encuentre la suma de todos los números enteros positivos de 5 dígitos que tienen sólo las cifras 1, 2, y 5, ninguna repetida mas de tres veces consecutivas.

Problema 2. Hannibal y Clarice están en un asado y quedan tres anticuchos, cada uno de los cuales tiene 10 trozos. De los 30 trozos totales, hay 29 de pollo y uno de carne, el cual se encuentra en el fondo de uno de los anticuchos. Para decidir quién se quedará con el pedazo de carne, deciden jugar al siguiente juego: sacan alternadamente un trozo de alguno de los anticuchos (pueden sacar sólo los trozos exteriores) y gana el juego quien logra sacar el trozo de carne. Clarice decide si empieza ella o empieza Hannibal. ¿Qué le conviene decidir?

Problema 3. Dada una sucesión finita de números reales $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0,$$

pruebe que existe al menos un índice i tal que

$$a_i > 0, \quad a_i + a_{i+1} > 0 \ , \quad \ldots \ , \quad a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n > 0.$$

Tiempo: 3 horas.

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Segunda prueba Final, 25 de Octubre de 2013

Problema 4. Considere una función f definida en los números enteros positivos que cumple las siguientes condiciones:

$$f(1) = 1\,, \quad f(2n) = 2f(n), \quad nf(2n+1) = (2n+1)(f(n)+n)\,,$$

para todo $n \geq 1$.

a) Pruebe que $f(n)$ es un entero para todo n.

b) Determine todos los enteros positivos m menores que 2013 que satisfacen la ecuación $f(m) = 2m$.

Problema 5. Una superficie cónica C es cortada por un plano P como muestra la figura en el reverso de esta hoja. Mostrar que $C \cap P$ es una elipse. Se puede utilizar como ayuda el hecho de que si se consideran las dos esferas tangentes a C y a P como se muestra en la figura, estas intersectan a P en los focos.

Recordatorios:

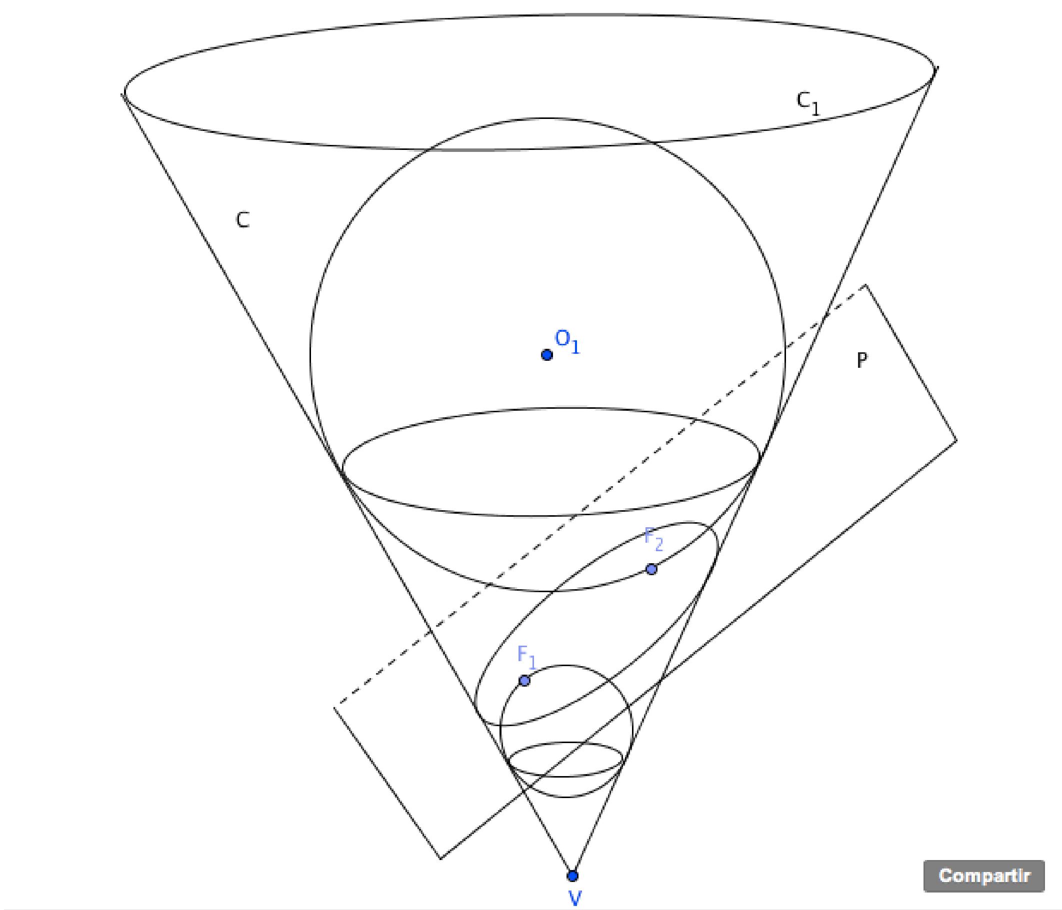
- La elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos, los focos, es una constante dada.
- Esta superficie cónica está conformada por el conjunto de rectas que pasan por V y por la circunferencia C_1.

Problema 6. Juan debe pagar 4 cuentas. Se dirige a un cajero automático, pero no recuerda el monto de las cuentas. Sólo sabe que

1. Cada cuenta es un múltiplo de 1.000 y es al menos de 4.000.
2. Las cuentas suman 200.000.

Cual es el menor número de veces que Juan debe usar el cajero para asegurarse de poder pagar las cuentas con cambio exacto sin que le sobre dinero? El cajero tiene billetes de 2.000, 5.000, 10.000, y 20.000. Juan puede decidir cuanto dinero le pide al cajero cada vez, pero no puede decidir cuantos billetes de cada tipo le dá el cajero.

Tiempo: 3 horas.


C1
C
O1
P
F2
F1
Compartir
V