XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Primera prueba de clasificación, 24 de Agosto de 2013

Problema 1. Dentro de un triángulo equilátero de lado 3 se marcan 5 puntos. Demuestre que hay dos de estos puntos a una distancia menor o igual que $3/2$.

Problema 2. Sobre cada una de las casillas de un tablero de 3×3 se escribe 0, ó -1 ó 1. Demuestre que de entre todas las filas y columnas, existen dos de manera tal que las sumas de las casillas correspondientes son iguales.

Problema 3. Considere un tablero cuadriculado de 2012×2013 casillas. ¿Cuántas casillas atraviesa una línea diagonal del tablero?

Aclaración: Decimos que una línea atraviesa una casilla cuando pasa por el interior de esta.

Tiempo: 2 horas.

SOCIEDAD DE MATEMATICA

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Segunda prueba de clasificación, 24 de Agosto de 2013

Problema 4. Sobre una pizarra están escritos los números

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Se quiere colocar símbolos $+$ ó $-$ delante de cada número y considerar el resultado de la suma correspondiente.

1. ¿Es posible colocar los símbolos de manera que la suma resultante sea 300?
2. ¿Es posible colocar los símbolos de manera que la suma resultante sea 0?

Problema 5. Considere un triángulo. Demuestre que existen 4 puntos sobre los lados del triángulo formando un cuadrado.

Problema 6. En la fiesta de celebración de los 25 años de la Olimpiada Nacional de Matemática participan 100 estudiantes. Cada hombre en la fiesta conoce exáctamente a 2 mujeres de la fiesta y cada mujer de la fiesta conoce exáctamente a 2 hombres de la fiesta. Si los participantes solo bailan con personas conocidas, demuestre que es posible que todos los participantes bailen al mismo tiempo.

Tiempo: 2 horas.

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Primera prueba de clasificación, 24 de Agosto de 2013

Problema 1. Dentro de un triángulo equilátero de lado 4 se marcan 10 puntos. Demuestre que hay dos de estos puntos a una distancia menor o igual que $\sqrt{3}$.

Problema 2. Un cierto país tiene n ciudades y $\frac{n^2-3n+4}{2}$ vuelos directos entre algunos pares de ciudades. Suponga que no hay dos ciudades con más de un vuelo directo entre ellas y que los vuelos directos se pueden hacer en cualquiera de los dos sentidos. Demuestre que se puede llegar desde cualquier ciudad a cualquier otra del país a través de alguna combinación de vuelos.

Problema 3. Considere un tablero cuadriculado de $m \times n$ casillas. ¿Cuántas casillas atraviesa una línea diagonal del tablero?

Aclaración: Decimos que una línea atraviesa una casilla cuando pasa por el interior de esta.

Tiempo: 2 horas.

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Segunda prueba de clasificación, 24 de Agosto de 2013

Problema 4. Sobre una pizarra están escritos los números

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots \quad 21 \quad 22$$

Se quiere colocar símbolos $+$ ó $-$ delante de cada número y considerar el resultado de la suma correspondiente.

1. ¿Es posible colocar los símbolos de manera que la suma resultante sea 0?
2. Muestre que existe algún resultado que se puede obtener colocando los símbolos $+$ ó $-$ en al menos 16000 maneras distintas.

Problema 5. Sobre las casillas de un tablero de 5×5 se escriben de manera desordenada los números del 1 al 25. Demuestre que existe una fila de manera tal que el producto de sus casillas es divisible por 32.

Problema 6. Para promocionar los 25 años de la Olimpiada Nacional de Matemática, la comisión olímpica confeccionó posters y cartas postales de menor tamaño, utilizando exáctamente la misma imagen. Sobre el escritorio del profesor Cortés hay un poster estirado, y sobre éste, sin sobresalir, hay una carta postal. El profesor Cortés nota un fenómeno muy particular: hay un punto de ambas imágenes que está situado exáctamente en la misma posición sobre el escritorio. Demuestre que tal fenómeno siempre se tiene. Determine si es posible que haya más de un punto con tal propiedad.

Tiempo: 2 horas.