XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Final Nivel Mayor
Primera Parte
16 de Octubre de 2014

Problema 1. Sean a, b, c números reales que son mayores que 0 y menores que 1. Demuestre que hay al menos uno de entre estos tres valores

$$ab(1-c)^2 \quad , \quad bc(1-a)^2 \quad , \quad ca(1-b)^2$$

que es menor o igual que $\frac{1}{16}$.

Problema 2. Considere un paralelogramo $ABCD$ de área 1. Sea E el centro de gravedad del triángulo ABC, F el centro de gravedad del triángulo BCD, G el centro de gravedad del triángulo CDA y H el centro de gravedad del triángulo DAB. Calcule el área del cuadrilátero $EFGH$.

Problema 3. En el plano hay 2014 puntos marcados, tales que no hay 3 que sean colineales. Para cada par de puntos marcados dibuje la recta que pasa por ellos. Pruebe que para todo trío de puntos marcados siempre hay dos que son separados por una cantidad impar de rectas.

Tiempo: 3 horas.

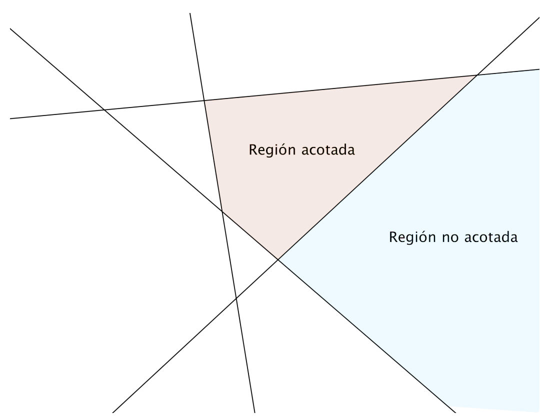
XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Final Nivel Mayor
Segunda Parte
17 de Octubre de 2014

Problema 4. Pruebe que para todo número entero n la expresión $n^3 - 9n + 27$ no es divisible por 81.

Problema 5. Demuestre que si un cuadrilátero $ABCD$ puede ser cortado en un número finito de paralelógramos, entonces $ABCD$ es un paralelógramo.

Problema 6. Pruebe que para todo conjunto de $2n$ rectas en el plano, tal que no hay dos rectas paralelas, existen dos rectas que dividen al plano en cuatro cuadrantes tales que en cada cuadrante la cantidad de regiones no acotadas es igual a n.



Tiempo: 3 horas.

CHILE
SOCIEDAD
DE
MATEMATICA

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Final Nivel Menor
Primera Parte
16 de Octubre de 2014

Problema 1. De una caja llena de monedas se extraen n monedas con las cuales se forman n torres de una moneda cada una. El único movimiento permitido en el juego es apilar dos torres distintas en una sola y luego agregar una moneda extraída de la caja a la torre. ¿Existe algún n tal que se puede terminar el juego con una sola torre de 2014 monedas?

Problema 2. Los puntos P, Q, R son los puntos medios de los lados $\overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$, de un rectángulo $ABCD$ respectivamente y M es el punto medio del segmento $\overline{QR}$. El área del rectángulo es 320. Calcule el área del triángulo APM .

Problema 3. Considere un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, con al menos una esquina de color negro. Determine todos los valores de n para los cuales un alfil que comienza en un casillero blanco pueda recorrer todos los casilleros blancos pasando exactamente una vez por cada uno de ellos.

Tiempo: 3 horas.

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Final Nivel Menor
Segunda Parte
17 de Octubre de 2014

Problema 4. Determine el dígito de las unidades del siguiente número:

$$(1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)+\cdots+(2014+2014^2)\,.$$

Problema 5. En un grupo de personas, cada una vota por alguna otra o bien se abstiene. Si A vota por B , B vota por C, C vota por D y D vota por A decimos que hubo una colusión de cuatro personas. De manera similar se define una colusión de n personas, $n \geq 2$. En esta votación no hubo colusiones y hubo al menos un voto. Demuestre que existe al menos una persona que votó y que no recibió ningún voto y que existe al menos una persona que se abstuvo y que sí recibió votos.

Problema 6. Pruebe que si un cuadrilátero $ABCD$ puede ser cortado en un número finito de paralelógramos, entonces $ABCD$ es un paralelógramo.

Tiempo: 3 horas.