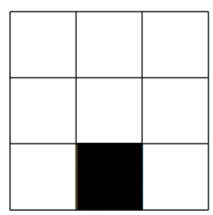
XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Primera prueba de clasificación, 23 de Agosto de 2014

Problema 1. Encuentra 5 números impares distintos tales que el producto de cualesquiera dos de ellos sea múltiplo cada uno de los demás.

Problema 2. En el tablero de 3×3 de la figura se juega el siguiente juego: Un movimiento permitido consiste en escoger uno de los cuadritos y cambiar de color (negro a blanco, blanco a negro) todos los que están pegados a él, ya sea en diagonal o compartiendo un lado (el cuadrito elegido no cambia de color). Determina si es posible, mediante movimientos permitidos, lograr que todos los cuadritos de la figura dada queden del mismo color.



Problema 3. En un triángulo equilátero ABC de lado 2 se prolonga el lado AB hasta un punto D de manera que B sea el punto medio de AD. Sea E el punto sobre AC de manera que $\angle ADE = 15°$ y se toma un punto F sobre AB de manera que $|EF| = |EC|$. Determine el área del triángulo AFE.

Tiempo: 2 horas.

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Segunda prueba de clasificación, 23 de Agosto de 2014

Problema 4. Para cada entero positivo n consideramos $S(n)$ como la suma de sus dígitos. Por ejemplo $S(1234) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Calcule

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(202) + S(203).$$

Problema 5. Las cuatro palabras codificadas

$$\square * \otimes \qquad \oplus \times \bullet \qquad *\square\bullet \qquad \otimes \diamond \oplus$$

son, en algún orden

$$AMO \qquad SUR \qquad REO \qquad MAS$$

Descifrar

$$\otimes \diamond \square * \oplus \times \square \bullet \oplus.$$

Problema 6. Considere un paralelogramo $[ABCD]$ tal que el ángulo $\angle DAB$ es agudo. Sea G un punto en la recta AB distinto de B y tal que $|BC| = |GC|$, y sea H un punto en la recta BC distinto de B y tal que $|AB| = |AH|$. Pruebe que el triángulo GDH es isósceles.

Tiempo: 2 horas.

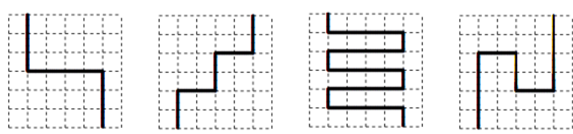
XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Primera prueba de clasificación, 23 de Agosto de 2014

Problema 1. Para a un entero positivo llamemos $< a >$ al número que se obtiene multiplicando cada cifra de a por 2 y escribiendo los números así obtenidos uno a continuación de otro. Por ejemplo $< 126 >= 2412$ y $< 809 >= 16018$. Probar que no es posible encontrar dos enteros positivos distintos a y b tales que $< a >=< b >$.

Problema 2. ¿De cuántas maneras es posible cortar un papel cuadriculado de 6×6 empezando en la parte inferior del papel y llegando a la superior si sólo se puede cortar sobre las líneas de la cuadrícula, las dos piezas en que quede partido deben ser iguales y no se se puede cortar hacia abajo (ver ilustración)? (Nota: Dos piezas se consideran iguales si se puede colocar una sobre la otra y ajustan perfectamente.)



corte válido corte válido corte válido corte inválido

Problema 3. En un triángulo equilátero ABC de lado 2 se prolonga el lado AB hasta un punto D de manera que B sea el punto medio de AD. Sea E el punto sobre AC de manera que $\angle ADE = 15°$ y se toma un punto F sobre AB de manera que $|EF| = |EC|$. Determine el área del triángulo AFE.

Tiempo: 2 horas.

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Segunda prueba de clasificación, 23 de Agosto de 2014

Problema 4. Para cada entero positivo n consideramos $S(n)$ como la suma de sus dígitos. Por ejemplo $S(1234) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Calcule

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(2012) + S(2013) - S(2014).$$

Problema 5. Dados 102 puntos en una circunferencia se escribe junto a uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto, y también el número de sus dos vecinos, el de la izquierda y de la derecha (donde hay un 1 se escribe 0 y donde hay un 0 se escribe 1). Demostrar que es imposible, con operaciones permitidas, lograr que todos los puntos tengan un 0.

Problema 6. Considere una figura convexa $\mathcal{P}$ en el plano. Para un punto Z del plano fuera de la figura denotamos por $|Z, \mathcal{P}|$ a la longitud más pequeña de los segmentos que unen Z con algún punto de $\mathcal{P}$. Considere una recta $\mathcal{L}$ que no corta a la figura $\mathcal{P}$, dos puntos X, Y sobre $\mathcal{L}$, y M el punto medio entre X e Y. Demuestre que

$$\frac{|X, \mathcal{P}| + |Y, \mathcal{P}|}{2} \geq |M, \mathcal{P}|.$$

Aclaración: Una figura plana se dice *convexa* cuando para cualquier par de puntos en ella, el segmento de recta que los une está completamente contenido en ella.

Tiempo: 2 horas.