XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Primera prueba de clasificación, 22 de Agosto de 2015

Problema 1. Considere un tablero cuadriculado de 16×16 casilleros. ¿Cuál es la cantidad máxima de casilleros que se pueden pintar de color negro de manera que no hayan más de 8 casilleros negros en cada fila, cada columna y cada diagonal del tablero?

Problema 2. En una pizarra están dibujados 4 puntos A, B, C y D de manera que forman un cuadrilátero convexo. Encontrar un punto E al interior del cuadrilátero de manera que la suma de las distancias a los 4 vértices sea la menor posible.

Aclaración: Un cuadrilátero se dice *convexo* si verifica que el segmento de recta que une cualquier par de sus puntos está contenido en su interior.

Problema 3. Encuentre todos los números primos p tal que $2^p + p^2$ es un número primo.

Tiempo: 2 horas.

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Menor

Segunda prueba de clasificación, 22 de Agosto de 2015

Problema 4. Determine si el siguiente número:

$$1! + 2! + ... + 2015!$$

es un cuadrado perfecto.

Observación: $n!$ se define como $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3... \cdot n$. Un número natural a es un *cuadrado perfecto* cuando existe un número natural b tal que $a = b^2$.

Problema 5. Considere un triángulo ΔABC, y un punto P en su interior. Al trazar las rectas AP, BP y CP, se determinan los puntos de intersección D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente. El triángulo queda dividido en 6 triángulos (ΔAFP, ΔFPB, ΔBDP, ΔDPC, ΔCPE, ΔEPA). Demuestre que si 4 de estos triángulos tienen la misma área entonces los puntos D, E, F son los puntos medios de los respectivos lados.

Problema 6. Sebastián y Fernando se disponen a jugar el siguiente juego: en una mesa hay 2015 fichas, que son rojas de un lado y negras del otro. Inicialmente las fichas están volteadas aleatoriamente y se juega alternadamente por turnos. En cada turno, se permite quitar cualquier cantidad no nula de fichas de un mismo color ó voltear cualquier cantidad no nula de fichas de un mismo color. Gana quien quite la última ficha. Si Sebastián juega primero, ¿Quién tiene una estrategia ganadora?

Tiempo: 2 horas.

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Primera prueba de clasificación, 22 de Agosto de 2015

Problema 1. Encuentre todos los números primos p tal que $2^p + p^2$ es un número primo.

Problema 2. Dado un triángulo ΔABC, acutángulo en B y C, demostrar que existe un único punto D en BC tal que el segmento EF es paralelo al lado BC, donde E y F son los puntos de intersección de las perpendiculares desde el punto D a los lados AB y AC respectivamente.

Problema 3. De un total de 49 cuadraditos blancos de un tablero de 7×7 han sido pintados 29 de negro. Demuestre que siempre existe al menos un cuadrado de 2×2 con al menos tres cuadraditos negros.

Tiempo: 2 horas.

SOCIEDAD DE MATEMÁTICA

XXVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA

Nivel Mayor

Segunda prueba de clasificación, 22 de Agosto de 2015

Problema 4. Considere un triángulo ΔABC, y un punto P en su interior. Al trazar las rectas AP, BP y CP, se determinan los puntos de intersección D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente. El triángulo queda dividido en 6 triángulos (ΔAFP, ΔFPB, ΔBDP, ΔDPC, ΔCPE, ΔEPA). Demuestre que si 4 de estos triángulos tienen la misma área, entonces los puntos D, E, F son los puntos medios de los lados.

Problema 5. Demuestre que el número:

$$(36a + b)(a + 36b)$$

nunca es una potencia de 2, para cualquier elección de números naturales a y b.

Problema 6. En un grupo de 2015 personas se observa lo siguiente: para cada par de personas que se conocen, entre los dos conocen a todos, pero no tienen conocidos en común. Pruebe que es posible separar a las personas en dos grupos, tales que en cada grupo nadie se conoce.

Aclaración: en este problema, si A conoce a B entonces también se tiene que B conoce a A, es decir, *conocerse* es una relación simétrica.

Tiempo: 2 horas.