



## XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

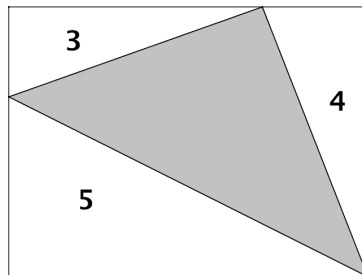
### Nivel Menor

Prueba única de clasificación, 20 de Agosto de 2016

**Problema 1.** Considere un número de dos o más dígitos, ninguno de ellos siendo cero (0). Un tal número es llamado *trejero* si todo par de dígitos consecutivos forma un número divisible por 13. Por ejemplo: 139 es trejero pues  $13 = 13 \times 1$  y  $39 = 13 \times 3$ . ¿Cuántos números trejeros de cinco dígitos existen?

**Problema 2.** Katia y Mariela juegan al siguiente juego: En cada uno de sus tres turnos, Katia reemplaza una de las estrellas en la expresión  $*****$  por algún dígito de entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que no haya sido utilizado antes en el juego. En los turnos de Mariela, ella reemplaza dos de las estrellas por dos dígitos distintos de entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que no hayan sido utilizados aún. Katia parte jugando y se juega alternadamente. Mariela gana si el número resultante al finalizar el juego es divisible por 27. ¿Tiene Mariela alguna manera de asegurar el triunfo?

**Problema 3.** Un rectángulo ha sido dividido, utilizando tres segmentos, en cuatro sectores como se ilustra en la figura. Si las áreas de los sectores indicados son 3, 4 y 5 respectivamente, encuentre el área del sector en gris.



**Problema 4.** Sobre la superficie de un cilindro de altura 12 y circunferencia basal de perímetro 4, se enrolla una cuerda cuyo extremo inicial está sobre la circunferencia superior, da un total de cuatro vueltas completas al cilindro y su extremo inferior está en la circunferencia inferior. ¿Cuál es la menor longitud que puede tener esta cuerda?

*Tiempo: 3 horas.*



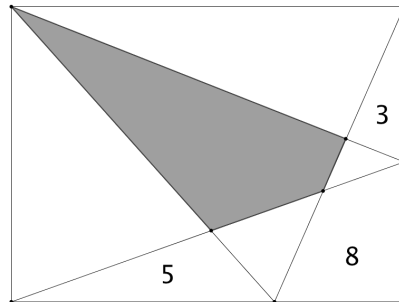
## XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Nivel Mayor

Prueba única de clasificación, 20 de Agosto de 2016

**Problema 1.** Katia y Mariela juegan al siguiente juego: En cada uno de sus tres turnos, Katia reemplaza una de las estrellas en la expresión  $\star \star \star \star \star \star \star \star$  por algún dígito de entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que no haya sido utilizado antes en el juego. En los turnos de Mariela, ella reemplaza dos de las estrellas por dos dígitos distintos que no hayan sido utilizados aún. Katia parte jugando y se juega alternadamente. Mariela gana si el número resultante al finalizar el juego es divisible por 27. ¿Tiene Mariela alguna manera de asegurar el triunfo?

**Problema 2.** Cuatro segmentos de recta dividen a un rectángulo en 8 regiones, tal como se ilustra en la figura. Para las tres regiones marcadas, el área es la como se indica: 3, 5 y 8. ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero gris?



**Problema 3.** En el interior de un cuadrado de lado 1 se marcan 2016 puntos. Pruebe que es posible, sin importar la posición de los puntos, unirlos todos utilizando un trazado continuo cuyo largo no sea mayor que 146.

**Problema 4.** Encuentre todos los pares de números primos  $(p, q)$  para los que la siguiente igualdad sea verificada:

$$7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1.$$

*Tiempo: 3 horas.*