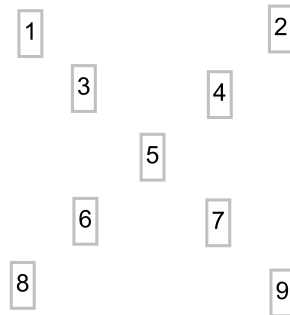


Prueba Final
Nivel Mayor

1. Considere la sucesión de números definidos por $a_1 = 7, a_2 = 7^7, \dots, a_n = 7^{a_{n-1}}$ para $n \geq 2$. Determine el último dígito de la representación decimal de a_{2021} .
2. Un diseño X es un arreglo de los dígitos $1, 2, \dots, 9$ con la forma de una X , por ejemplo,



Diremos que un diseño X es equilibrado si la suma de los números de cada una de las diagonales coinciden. Determine la cantidad de diseños X que son equilibrados.

3. Encuentre todos los polinomio $p(x)$ con coeficientes reales que satisfacen

$$4p(x^2) = 4(p(x))^2 + 4p(x) - 1.$$

4. Considere el cuadrilátero $ABCD$ con $|DC| > |AD|$. Sea P un punto en DC tal que $PC = AD$ y sea Q el punto medio de DP . Considere L_1 la recta perpendicular a DC que pasa por Q y sea L_2 la bisectriz del ángulo $\angle ABC$. Llamemos $X = L_1 \cap L_2$. Demuestre que si el cuadrilátero es cíclico entonces X está en el circuncírculo de $ABCD$.

