Prueba Nacional
Nivel Mayor

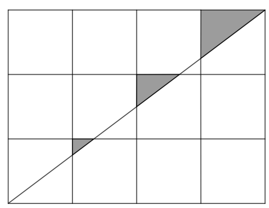
1. Se escriben 13 fracciones utilizando cada uno de los números $1, 2, \ldots, 26$ exactamente una vez, ya sea como numerador o denominador. Determine la cantidad mayor de enteros que puede haber.

   RESPUESTA: 12

2. Sea n un entero positivo tal que al dividir 7240 por n el resto es 37. La cantidad de de números n con esa propiedad es

   RESPUESTA: 6

3. En un cuadriculado de 4×3 Simón dibuja una diagonal y colorea tres triángulos de áreas $A < B < C$ como se muestra en la figura.

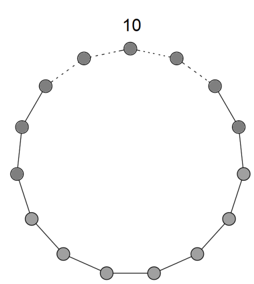
   Determine el valor de $\dfrac{B+C}{A}$.

   Respuesta: 13

4. Determine un número primo p de tal manera que $p - 1$ tenga exactamente 10 divisores mientras que $p + 1$ tenga exactamente 6 divisores.

   Respuesta: 163

5. Hay 2021 números colocados en una rueda. Solo uno de los números es visible (un 10 en la parte superior). Para un cierto valor de n, con $0 < n < 2021$, si la suma de n números consecutivos cualesquiera es la misma, entonces todos son iguales a 10. Determine la cantidad de posibles valores de n.

$\boxed{\textbf{Respuesta: 1.933}}$

6. Sea ABC un triángulo e I su incentro. El circuncírculo de ACI intersecta la línea BC una segunda vez en el punto X y el circuncírculo BCI intersecta por segunda vez a la línea AC en el punto Y. Además $\angle BAC = 30°$ y $\angle CBA = 110°$. Entonces el ángulo $\angle BAX$ mide en grados

   $\boxed{\textbf{RESPUESTA: 70}}$

7. En el triángulo rectángulo ABC la hipotenusa AB mide 12 cm. Se construyen los cuadrados $ACXY$, $BCZW$ hacia afuera del triángulo de lado el cateto correspondiente. Los puntos X, Y, W, Z están en una circunferencia. El perímetro del triángulo ABC es

   A. $12 + 9\sqrt{3}$ B. $18 + 6\sqrt{3}$ C. $\boxed{12(1 + \sqrt{2})}$ D. 30 E. 32

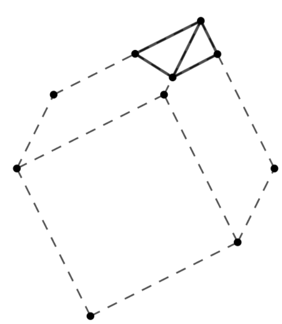
8. Considere un tablero de 4×4. Las casillas se marcan con un 1 o con un -1. Una vez marcadas las casillas se procede a sumar los números de cada fila y a sumar los números de cada columna. Llamemos S la suma de todos estos 8 resultados. Determine la cantidad de distribuciones diferentes de tal manera que $S = 0$.

   $\boxed{\textbf{RESPUESTA : 12.870}}$

9. En la mañana, una heladería ofrece 16 sabores. En la mañana Luis quiere elegir un helado de 2 sabores distintos. Por la noche se agotaron varios sabores y Ester quiere elegir un helado de 3 sabores distintos entre los sabores que quedan. Tanto Luis como Ester pueden elegir entre la misma cantidad de combinaciones posibles. ¿Cuántos sabores se agotaron?

   $\boxed{\textbf{RESPUESTA = 6}}$

10. Un iceberg tiene la forma de un cubo. Exactamente el 90 % de su volumen está oculto debajo de la superficie del agua. Tres bordes del cubo son parcialmente visibles sobre el agua. Las partes visibles de estos bordes son de 24 m, 25 m y 27 m



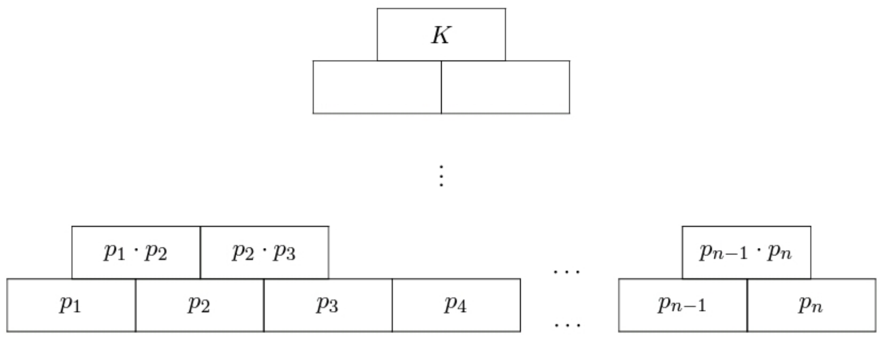
   ¿Cuánto mide la arista del cubo?

   $\boxed{\textbf{RESPUESTA = 30}}$

11. Considere polinomios $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ con a, b, c números enteros. Determine la cantidad de polinomios $q(x)$ de tal forma que $\sqrt{2}$ es una raíz de q y para algún número entero t se tiene que $q(t) = 2021$.

$\boxed{\textbf{RESPUESTA} = \textbf{4}}$

12. Hay n números primos diferentes en la fila inferior de la tabla de izquierda a derecha como p_1 a p_n. En cada casilla de la siguiente fila se escribe el producto de los dos números que están abajo de ella y así sucesivamente, de modo que en la última fila compuesta por una sola casilla esta el número $K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$.



Si $\alpha_2 = 8$, ¿cuántos números en la tabla son divisibles por el número p_4?

$\boxed{\textbf{RESPUESTA} = \textbf{24}}$