XXXII Olimpíada Nacional de Matemática 2020

PRUEBA FINAL

NIVEL MENOR

24 Octubre 2020

1. Determine la cantidad de números enteros positivos menores que 2020 que se escriben como suma de dos potencias de 3.

Solución.

Observamos que $3^6 = 729$ y $3^7 = 2187 > 2020$.

Los números buscados tiene la forma

$$a_0 3^0 + a_1 3^1 + a_2 3^2 + \cdots + a_6 3^6$$

con a_i =0 ó 1.

Luego la cantidad de números que se escriben como dos potencias de 3 distintas corresponde a que haya sólo dos $a_i = 1$ y el resto cero.

Esto corresponde a contar cuántas maneras se puede repartir dos bolas en 7 cajas.

Esto corresponde a la cantidad de $\binom{7}{2} = 21$ números enteros positivos que se escriben como suma de dos potencias de 3 distintas.

Además la suma de dos potencias menores o iguales a 3^6 es también menor que 2020,

$$3^k + 3^k \leq 3^6 + 3^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458 < 2020$$

Hay 7 de estos: $1 + 1, 3 + 3, \ldots, 3^6 + 3^6$.

Luego, la cantidad total es 28 números con la propiedad pedida.

Solución 2.

La suma de dos potencias menores o iguales a 3^6 es también menor que 2020, puesto que si $0 \leq k \leq 6$ entonces

$$3^k + 3^k \leq 3^6 + 3^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458 < 2020\,.$$

Hay 7 potencias de 3 que se pueden usar, puesto que $3^6 < 2020$ y $3^7 > 2020$. -

Luego, si el primero es 3^0 hay para el segundo 7 posibilidades.

Si el primero es 3^1 hay 6 posibilidades para el segundo.

Luego la cantidad total es $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ posibilidades, y son todas distintas.

2. Un estudiante debe elegir tres clases entre los ramos de Física, Literatura y Matemática; para elaborar su calendario de 7 días de clases. Cada día debe elegir sólo uno de ellos. La única restricción es que en cuatro días consecutivos debe tener los tres ramos. Determine la cantidad posible de calendarios que puede formar el estudiante .

   Solución. El problema consiste en rellenar el horario de 7 días con las letras F, L, M de tal forma que cualquier período de 4 días consecutivo contenga estas tres letras.

   Para ello, procedemos a llenar el centro del calendario.

D_1	D_2	F	L	M	D_6	D_7

Caso 1 Si $D_7 = F$ entonces D_6 puede valer F, L, M. Es decir tres casos. Si $D_7 = L$ entonces $D_6 = F$ y si $D_7 = M$ entonces $D_6 = F$. Total valores para (D_6, D_7) es 5. Lo mismo pasa con las posibles elecciones de los días (D_1, D_2). Total de casos $5 \times 5 = 25$.

Caso 2 En este siguiente caso D_2 debe ser M.

D_1	D_2	F	F	L	D_6	D_7

Entonces $D_1 = L$. Siguiendo con el desarrollo si $D_6 = M$ entonces $D_7 = F, L, M$. Tres posibilades. Total de posibilidades 3.

Caso 3 Simétrico caso anterior. 3 posibilidades.

D_1	D_2	L	F	F	D_6	D_7

Caso 4 Simétrico al caso anterior. 3 posibilidades. Aquí debemos elegir $D_2 = D_6 = M$ y D_1 y D_7 cualquiera de los tres. Total $3 \times 3 = 9$ posibilidades.

D_1	D_2	F	L	F	D_6	D_7

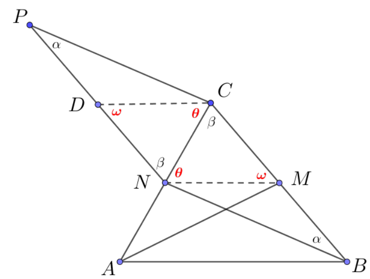
De esta manera hay $25 + 3 + 3 + 9 = 40$ posibilidades para una elección de $\{F, L, M\}$ Como hay 3! permutaciones de estas tres letras, hay en total $6 \times 40 = 240$ calendarios posibles.

3. En un triángulo ABC, se trazan las transversales de gravedad AM y BN, por N una paralela a BC y por C una paralela a BN. Estas dos rectas se cortan en P y sea D el punto medio de PN. Demuestre que CD es paralela a MN.

   Una transversal de gravedad es el trazo que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto al vértice.

   Solución.

   Miremos la figura siguiente



   Observemos que por construcción $BNPC$ es un paralelogramo. Luego sus ángulos opuestos son iguales, es decir, $\angle NPC = \angle NBC = \alpha$.

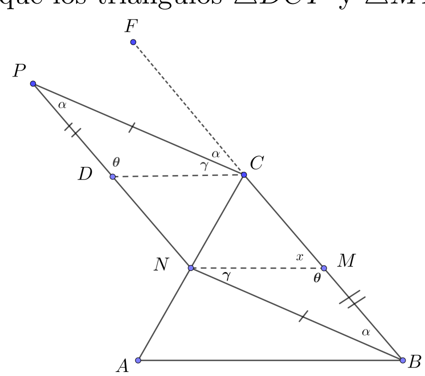
   Además por ser paralelogramo sus lados opuestos son iguales. Por lo tanto, los triángulos $\triangle NPC = \triangle NBC$ son congruentes por criterio LAL de lo cual se concluye que los ángulos $\angle PNC = \angle BCN = \beta$.

   Puesto que $|PD| = |CB|$ (lados opuestos paralelogramo) y D, M son puntos medios de sus correspondientes trazos se concluye que $|PD| = |DN| = |CM| = |MB|$. De estas igualdades se obtiene que los triángulos $\triangle NDC = \triangle NMC$ son congruentes. Se deduce entonces que $\angle NCD = \angle CNM = \theta$ y $\angle NDC = \angle NMC = \gamma$.

   Es decir, los ángulos opuestos del cuadrilátero $NMCD$ son iguales entonces es un paralelogramo, y por lo tanto sus lados opuestos son paralelos, es decir, NM es paralelo a DC.

   Solución 2 Como $PNBC$ es un paralelogramo sus lados opuestos son iguales. Como D y M son puntos medios se obtiene que $|PD| = |MB|$. Además los ángulos opuestos son iguales $\alpha = \angle DPC = \angle NBM$.

   De esta manera se prueba que los triángulos $\triangle DCP$ y $\triangle MNB$ son congruentes.



   Por lo tanto $x = \gamma + \alpha$.

   Además $PN \parallel BC$ se obtiene que $\angle PCF = \alpha$. Por lo tanto, $\angle NMC = \angle DCF$ lo cual prueba que los trazos CD y NM son paralelos.

4. Un doctor receta a su paciente que debe tomar 48 pastillas durante 30 días, al menos una y no más de 6 al día. Pruebe que no importa como el paciente decida tomarlas, siguiendo las instrucciones del doctor, hay una cantidad de días consecutivos en que él tomará exactamente 11 pastillas.

Solución

Sea t_k la cantidad de pastillas tomadas entre el día 1 y el día k.

Entonces los números siguientes forma una sucesión creciente

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{30} = 48 \qquad (1)$$

Por lo mismo, lo números

$$0 < t_1 + 11 < t_2 + 11 < \ldots < t_{30} + 11 = 59 \qquad (2)$$

En total tenemos 60 números enteros positivos y el mayor de ellos es 59.

Como cada número de la sucesión de treinta en (1) son distintos y lo mismo para sucesión en (2), por el Principio del Palomar hay dos ellos que deben ser iguales.

$$t_j = t_i + 11 \text{ con } 1 \leq j \leq 30\,, i \neq j\,.$$

Notemos que $p_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ es la cantidad de pastillas tomadas el día $k+1$.

Si para algún i, $t_{i+1} = t_i + 11$ se tiene que

$$p_{i+1} = t_{i+1} - t_i = 11$$

lo cual no puede ocurrir puesto que a lo más puede tomar 6 pastillas al día.

Ahora si $j = i + k$,$k \geq 2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} t_j &= t_{i+k} = \underbrace{t_{i+k} - t_{i+k-1}} + \underbrace{t_{i+k} - t_{i+k-1}} + \cdots + t_{i+1} \\ &= t_i + 11 \end{aligned}$$

Esto muestra que hay una cantidad consecutiva de k días donde se tiene que

$$k \leq p_{i+k} + p_{i+k-1} + \cdots + p_{i+1} = 11$$

Esto prueba que existe $k \geq 11$ tal que

$$p_{i+k} + p_{i+(k-1)} + \cdots + p_{i+1} = 11$$