



# XXXI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Nivel Mayor

Prueba Nacional

24 Agosto de 2019

## PROBLEMA 1

La secuencia de números 123456789101112131415... se obtiene escribiendo los enteros positivos en orden, uno a continuación del otro. ¿ En qué posición está el 2 **la primera vez que aparece** 2019 en la sucesión ?

## PROBLEMA 2

Considere un cuadrado en el plano con vértices

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)$$

donde  $a_i, b_i$  son números enteros para cada  $i = 1, \dots, 4$ . Suponga que el área del cuadrado es una potencia de 3. Pruebe que sus lados son paralelos a los ejes.

## PROBLEMA 3

Pruebe que para todo número entero  $n > 2$  se cumple que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{5}{6}.$$

## PROBLEMA 4

$ABC$  es un triángulo de área cuatro con circuncentro  $O$  y  $M$  es el punto medio de  $AO$ . Se eligen los puntos  $P, Q$  en los lados  $AB$  y  $AC$  respectivamente de modo tal que  $M$  está en  $PQ$  y los trazos  $BC$  y  $PQ$  son paralelos. Suponga que el área del triángulo  $APQ$  es uno. Calcule el ángulo  $BAC$ .

**Tiempo:** : 3 horas 30 minutos