XXX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Menor

Resolución Prueba Nacional
25 Agosto de 2018

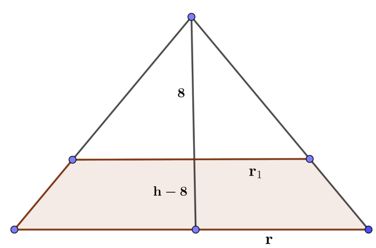
Problema 1 (10 puntos)**.** Una botella cónica posada en sus base se llena de agua hasta una altura que esta 8 cm. de su vértice. Al voltear la botella el nivel del agua queda a 2 cm. de su base. Calcule la altura de la botella.

Solución

Llamemos h, r la altura y el radio de la botella cónica. El volumen V_a de agua es

$$V_a = \frac{\pi}{3}\, r^2 h - \frac{\pi}{3}\, 8\, r_1^2\,.$$

Usando la figura,



se obtiene $\frac{r}{r_1} = \frac{h}{8}$, y se concluye que $r_1 = \dfrac{8r}{h}$. Luego,

$$V_a = \frac{\pi}{3}\, r^2 \left(h - \frac{8^3}{h^2} \right)\,.$$

La cantidad de agua V_a en la botella invertida es la misma. Usando la relación $\dfrac{r}{r_2} = \dfrac{h}{h-2}$ se obtiene que $r_2 = \dfrac{r}{h}(h-2)$ y por lo tanto,

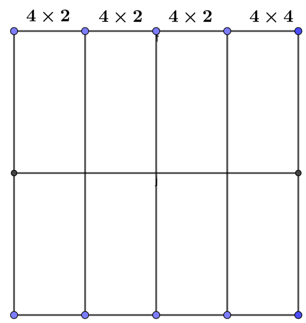
$$V_a = \frac{\pi}{3}\,(h-2)\frac{r^2}{h^2}\,(h-2)^2\,.$$

Igualando, se tiene que h satisface la ecuación $h^2 - 2h - 84 = 0$ que tiene como única solución positiva $h = 1 + \sqrt{85}$.

Problema 2 (10 puntos)**.** Un cuadrado de lado 8 cm se divide en 64 cuadraditos de 1 cm^2. Se colorean 7 cuadraditos de negro y el resto de color blanco. Encuentre la máxima área de un rectángulo compuesto solo por cuadraditos blancos independiente de la distribución de los cuadraditos negros.

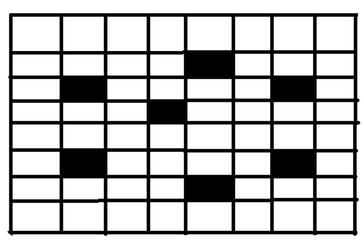
Solución

Construyamos la siguiente partición del cuadrado de 8×8 en 8 pedazos rectángulares de 4×2 como muestra la figura.



Por el Principio del Palomar, hay al menos un rectángulo de $4 \times 2 = 8$ cm^2 que no tiene ningún cuadradito negro en su interior.

Esto prueba que al menos un rectángulo de $4 \times 2 = 8$ cm^2 se puede elegir. Ahora mostramos una distribución de cuadraditos negros que no permite rectángulos de mayor área que $4 \times 2 = 8$ cm^2, lo cual demuestra que el rectángulo de mayor área que se puede elegir es realmente $4 \times 2 = 8$ cm^2, como muestra la figura:



Problema 3 (10 puntos). De un libro de 1000 páginas se han arrancado una cantidad consecutiva de hojas. Se sabe que la suma de los números de las páginas arrancadas es 2018. Determine la numeración de las páginas arrancadas.

Solución

Como son consecutivas las hojas faltantes, llamamos $a, a+1, a+2, \ldots, a+(n-1)$ la numeración de las páginas faltantes. Como cada hoja contiene dos páginas, n debe ser par.

Sumando las numeraciones se obtiene que

$$a + a + 1 + a + 2 + \cdots + a + (n-1) = na + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2018\,.$$

Entonces, usando que la descomposición primaria de $2018 = 2 \cdot 1009$.

$$na + \frac{(n-1)n}{2} = 2018 \Rightarrow 2na + (n-1)n = 2^2 \cdot 1009\,.$$

De esta manera,

$$n(2a + (n-1)) = 2^2 \cdot 1009\,.$$

Como n es par , $2a + (n-1)$ es impar. y el único divisor de impar de $2^2 \cdot 1009$ es 1009 se tiene que : $n = 4$ y $2a + (n-1) = 1009$. Luego, $a = 503$.

Por lo tanto la numeración de las páginas faltantes son: $503, 504, 505, 506$.

Nota. Si sólo calcula la numeración de las páginas mediante inspección tiene a lo más 3 puntos.

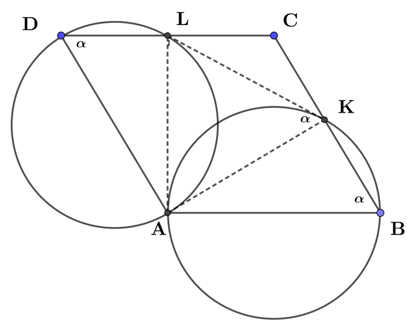
Problema 4 (10 puntos)**.** En un rombo $ABCD$ se traza una circunferencia con centro en el punto medio del lado AB y con diámetro AB, que corta al lado BC en el punto K. Similarmente se traza una circunferencia con centro en el punto medio del lado AD y de diámetro AD que corta al lado CD en el punto L. Suponga que $\measuredangle AKL = \measuredangle ABC$. Determine los ángulos del rombo. Recordar que un rombo es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son iguales.

Solución

Seguramente pueden desarrollarse otras soluciones.

Observemos que por el Teorema de Thales, los ángulos $\measuredangle AKB = \measuredangle DLA = 90^o$.

Los ángulos opuestos de un rombo son iguales, $\alpha := \measuredangle ABC = \measuredangle ABC$



Además $AB = AD$. De esta manera los triángulos $\triangle ABK = \triangle ADL$ son congruentes. Por lo tanto, $BK = DL$ y $AK = AL$.

Se deduce que el triángulo AKL es isósceles y luego los ángulos basales son iguales. Por lo tanto, usando la hipótesis $\alpha = \measuredangle ALK = \measuredangle AKL$.

Llamamos $\beta := \measuredangle BCD$ al otro ángulo del rombo. Entonces $2\alpha + 2\beta = 360^o$ y luego, $\beta = 180^0 - \alpha$.

Sumando los ángulos internos del cuadrilátero $AKCL$ se obtiene la igualdad siguiente:

$$\measuredangle LAK + 90^o + (180^o - \alpha) + 90^0 = 360^0 \Rightarrow \measuredangle LAK = \alpha$$

Luego el triángulo $\triangle AKL$ es equilátero con ángulo α.

Luego $\alpha = 60^0$ y $\beta = 120^0$.