Soluciones oficiales de los problemas de la Final Olimpiada Nacional 2008

Comisión Académica

Problema 1, nivel menor; Problema 1, nivel mayor. Si los números de los recorridos se escriben de la forma abc, donde a, b y c son dígitos, entonces tenemos $a \neq 0$, $2b = a + c$, y $100a + 10b + c = 13d$ para cierto entero positivo d. Reemplazando obtenemos $105a + 6c = 13d$, es decir,

$$6c + a = 13(d - 8a) = 13u.$$

Analizamos todos los casos psibles:

– si $c = 0$ entonces a es múltiplo (no nulo) de 13: imposible.

– si $c = 1$ entonces $a = 13u - 6$ está entre 1 y 9 si y sólo si $u = 1$. En número que aparece es $741 = 13 \times 57$.

– si $c = 2$ entonces $a = 13u - 12$ está entre 1 y 9 sólo para $u = 1$. Sin embargo, esto nos da que $b = 1.5$ no es entero.

– si $c = 3$ entonces $a = 13u - 18$ implica $u = 2$ y $a = 8$. Sin embargo, esto implica que $b = 5.5$ no es entero.

– si $c = 4$ entonces $a = 13u - 24$ implica $u = 2$ y $a = 2$. Se obtiene así el número $234 = 13 \times 18$.

– si $c = 5$ entonces $a = 13u - 30$ implica $u = 3$ y $a = 9$. Se obtiene así el número $975 = 13 \times 75$.

– si $c = 6$ entonces $a = 13u - 36$ implica $u = 3$ y $a = 3$. Sin embargo, esto implica que $b = 4.5$ no es entero.

– si $c = 7$ entonces $a = 13u - 42$ no está entre 1 y 9 para ningún entero u.

– si $c = 8$ entonces $a = 13u - 48$ implica $u = 4$ y $a = 4$. Se obtiene así el número $468 = 13 \times 36$.

– si $c = 9$ entonces $a = 13u - 54$ no está entre 1 y 9 para ningún entero u.

En resumen, los números de los recorridos buscados son 741, 234, 975 y 468.

Problema 2, nivel menor. Unamos C con el centro O y prolonguemos el trazo hasta cortar al lado AB en un punto D. Los triángulos ΔDBC y ΔORC son semejantes, de donde se obtiene que $\overline{OR} = \overline{DB} \cdot \overline{CO}/\overline{CD} = \overline{DB}/\overline{CD}$. Si designamos por a la longitud de los lados del triángulo ΔABC tenemos $\overline{DB} = a/2$ y $\overline{CD} = a\sqrt{3}/2$. Luego, $\overline{OR} = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, por lo que

$$\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 1.5773... > 1.5707... = \frac{\pi}{2} = \widehat{CQ}.$$

Problema 3, nivel menor.

Para la segunda parte, observe que de las igualdades asumidas se sigue que

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{b+c}{bc} + \frac{1}{d} = \frac{d-a}{bc} + \frac{1}{d} = \frac{d^2 - ad + bc}{bcd} = \frac{d^2}{bcd} = \frac{d}{bc} = \frac{1}{a}$$

Para la primera parte, observe que los roles de b y c son intercambiables. Por lo tanto, denotando por $(\cdot,\cdot)$ el máximo común divisor, debemos considerar sólo cuatro casos: $(a,b) = 1$, $(c,d) = 1$, $(a,d) = 1$, y $(b,c) = 1$.

Si $(a,b) = 1$ entonces de la igualdad $ad = bc$ deducimos que existe un entero positivo x tal que $c = ax$ y $d = bx$. La igualdad $a + b + c = d$ se transforma entonces en $a + b + ax = bx$, es decir

$$x = \frac{b+a}{b-a} = 1 + \frac{2a}{b-a}.$$

Observe que a y $b - a$ no pueden tener factores comunes no triviales, por lo que $b - a$ divide a 2. Si $b - a = 1$ obtenemos la familia de soluciones

$$a = a, \quad b = a+1, \quad c = (2a+1)a, \quad d = (2a+1)(a+1).$$

Si $b - a = 2$ entonces obtenemos la familia de soluciones

$$a = a, \quad b = a+2, \quad c = a(1+a), \quad d = (a+2)(1+a),$$

donde a es impar.

Si $(c,d) = 1$ entonces de la igualdad $ad = bc$ deducimos que existe un entero positivo x tal que $b = dx$ y $a = cx$. Sin embargo, esto es imposible, pues implica que

$$d = a + b + c = a + c + dx > dx \geq d.$$

Afirmamos que los casos tercero y cuarto son equivalentes, es decir, $(a,d) = 1$ si y sólo si $(b,c) = 1$. En efecto, si r divide a b y c entonces de $ad = bc$ se concluye que r divide a d o a. En el primer caso, de $a = d - b - c$ se concluye que r divide también a a; en el segundo, de $d = a + b + c$ se concluye que r divide también a d. Luego, si b y c no son primos relativos, entonces a y d tampoco lo son. Análogamente se prueba que si a y d no son primos relativos, entonces b y c tampoco lo son. Sean

$$a = \prod p_i^{\alpha_i}, \quad d = \prod q_i^{\beta_i}, \quad b = \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} q_{i'}^{\beta_{i'}}, \quad c = \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} q_{i''}^{\beta_{i''}},$$

las descomposiciones de a, d, b y c en factores primos, donde $p_{i'}$, $p_{i''}$ son escogidos de entre los p_i, y análogamente para los q_i. La igualdad $d = a + b + c$ se transforma en

$$\prod q_i^{\beta_i} = \prod p_i^{\alpha_i} + \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} q_{i'}^{\beta_{i'}} + \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} q_{i''}^{\beta_{i''}},$$

es decir,

$$\prod q_{i'}^{\beta_{i'}} \Big(\prod q_{i''}^{\beta_{i''}} - \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} \Big) = \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} \Big(\prod q_{i''}^{\beta_{i''}} + \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} \Big).$$

De esta igualdad se deduce la existencia de un entero N tal que

$$\prod q_{i''}^{\beta_{i''}} + \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} = N \prod q_{i'}^{\beta_{i'}}, \qquad \prod q_{i''}^{\beta_{i''}} - \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} = N \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}}. \tag{1}$$

Observe que esta igualdad implica que

$$N \prod q_{i'}^{\beta_{i'}} = N \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} + 2 \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}},$$

es decir

$$N \Big(\prod q_{i'}^{\beta_{i'}} - \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} \Big) = 2 \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}},$$

Observe que N no puede tener factores comunes con $\prod p_{i'}^{\alpha_{i'}}$, pues ello contradiría cualquiera de las relaciones en (1). Luego, N es igual a 1 o 2.

Invirtiendo los argumentos se llega entonces a las siguientes solución: si $\prod p_{i'}^{\alpha_i'}$ y $\prod q_{i''}^{\beta_{i''}}$ son dados (con cada $p_{i'}$ distinto de cada $q_{i''}$), entonces definiendo

$$\prod q_{i'}^{\beta_{i'}} = \prod q_{i''}^{\beta_{i''}} + \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}}, \qquad \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} = \prod q_{i''}^{\beta_{i''}} - \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}},$$

o bien

$$\prod q_{i'}^{\beta_{i'}} = \frac{1}{2} \Big[\prod q_{i''}^{\beta_{i''}} + \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} \Big], \qquad \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} = \frac{1}{2} \Big[\prod q_{i''}^{\beta_{i''}} - \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} \Big]$$

en caso en que ningún $p_{i'}, q_{i''}$ sea igual a 2, y luego haciendo

$$a = \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}}, \quad d = \prod q_{i'}^{\beta_{i'}} \prod q_{i''}^{\beta_{i''}}, \quad b = \prod p_{i'}^{\alpha_{i'}} q_{i'}^{\beta_{i'}}, \quad c = \prod p_{i''}^{\alpha_{i''}} q_{i''}^{\beta_{i''}},$$

se obtiene una solción al problema (se verifica rápidamente que a, d son primos relativos, al igual que b, c).

Problema 4, nivel menor.

Para $n = 4$ un conjunto C posible viene dado por el conjunto de los vértices de un cuadrado. Afirmamos que C no puede tener más de 4 vértices. En efecto, supongamos que C contuviese a los vértices de un cuadrado $PQRS$ y un punto extra T. Podemos escoger un sistema de coordenadas de modo que $P = (0, 0)$, $Q = (2, 0)$, $R = (0, 2)$ y $S = (2, 2)$. Como Q, R y T son vértices de un cuadrado, las únicas posibilidades para T son $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ y $(4, 2)$. Análogamente, como P, S y T son vértices de un cuadrado, las únicas posibilidades para T son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 0)$ y $(-2, 2)$. Luego, T debe coincidir con el centro $(1, 1)$ del cuadrado original $PQRS$. Sin embargo, en este caso Q, R y T son colineales, y por lo tanto no pueden ser los vértices de un mismo cuadrado.

Problema 5, nivel menor.

Para toda terna de números reales se tiene

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

De esta igualdad se concluye que, si $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ y $a + b + c \neq 0$, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Notando que

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right],$$

de lo anterior se deduce que $a = b = c$.

Observación. Si a, b y c son no negativos, entonces la igualdad $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ es equivalente a

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3},$$

que se puede interpretar como una igualdad entre las medias aritméticas y geométricas de a^3, b^3 y c^3. Es bien sabido que esta igualdad implica que a^3, b^3 y c^3 (y por tanto a, b y c) son iguales entre sí. Observe sin embargo que este argumento no se aplica si alguno de los términos fuese negativo.

Problema 6, nivel menor; Problema 5, nivel mayor.

Con 140 litros de bencina no se puede atravesar el desierto. En efecto, para atravesar el desierto se necesita almacenar bencina en el kilómetro 300 o más adelante (de lo contrario se recorrerían más de 500 kilómetros sin recarga de combustible). Llamemos a este punto de depósito P. Para ir a alamacenar la bencina al punto P se requiere recorrer al menos dos veces la distancia de la primera bencinera a P, es decir, al menos 600 kilómetros. Esto sumado al hecho de que la distancia total a atravesar es de 800 km indica que no se puede cruzar con menos de 140 litros. Para ver que tampoco se puede atravesar con exactamente 140 litros, simplemente observe que en un sólo viaje de ida y vuelta no se puede ir a almacenar bencina al punto P.

Con 180 litros sí se puede cruzar. Para ello, el camionero puede:

– hacer tres viajes al punto P situado a 50 km de la partida, almacenando 40 litros de bencina en P en cada uno de ellos;

– tras estos tres viajes cargar el estanque en la primera bencinera con 30 litros, para luego volver a avanzar y llegar al punto P con 25 litros;

– desde el punto P avanzar dos veces a un punto Q a 100 kilómetros de él, almacenando allí 30 litros en cada viaje;

– de vuelta en el punto P cargar los 45 litros que allí aún están almacenados, para volver a avanzar llegando al punto Q con 35 litros;

– avanzar 150 kilómetros desde Q para llegar a un punto R, alamacenar allí 20 litros, y volver a Q;

– cargar los 45 litros que aún quedan en Q, avanzar para llegar a R con 30 litros, cargar allí los 20 litros almacenados, y completar el cruce.

Problema 2, nivel mayor.

Apliquemos una rotación (en el sentido de las manecillas del reloj) de centro A y ángulo $\pi/2$. El punto C se transforma entonces en B. Sea P' el punto obtenido a partir de P. Como $\overline{AP} = \overline{AP'}$ y $\angle PAP' = \pi/2$, el triángulo APP' es la "mitad" de un cuadrado, por lo que $\overline{PP'} = \overline{AP}\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. La imagen por la rotación de CP es BP', por lo que $\overline{BP'} = b$. Luego, los lados del triángulo $PP'B$ miden $a\sqrt{2}$, b y c.

Problema 3, nivel mayor.

Multiplicando términos cruzados se obtiene, para $x \neq y$,

$$4\left[f(\frac{x+y}{2} - f(y))\right]\left[f(x) - f(\frac{x+y}{2})\right] = [f(x) - f(y)]^2.$$

Desarrollando esta igualdad se obtiene fácilmente

$$4f(\frac{x+y}{2})[f(x)+f(y)] - 4f(x)f(y) - 4f(\frac{x+y}{2})^2 = f(x)^2 - 2f(x)f(y) + f(y)^2,$$

por lo que

$$4f(\frac{x+y}{2})^2 - 4f(\frac{x+y}{2})[f(x)+f(y)] + f(x)^2 + 2f(x)f(y) + f(y)^2 = 0,$$

es decir

$$\left[2f(\frac{x+y}{2}) - (f(x)+f(y))\right]^2 = 0.$$

De esta última igualdad se concluye que

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Afirmamos que esta última relación implica que para $a = f(1) - f(0) > 0$, $b = f(0)$ y todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $f(x) = ax + b$. Para probarl esto, note primeramente que vale para $x = 0$ o $x = 1$, dada la definición de a y b. Para probar que vale para todo entero positivo, note que si asumimos inductivamente que vale para $0, 1, \ldots, n-1$, entonces de

$$f(n-1) = f(\frac{n+(n-2)}{2}) = \frac{f(n)+f(n-2)}{2}$$

se concluye que

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) = 2a(n-1) + 2b - [a(n-2)+b] = an + b.$$

Un argumento análogo prueba la afirmación para x entero negativo. Probemos ahora por inducción sobre q que la igualdad vale para todo x de la forma $x = p/2^q$, con p entero cualquiera y q entero no negativo. Acabamos de verificar el caso $q = 0$. Ahora, si lo afirmado vale para $0, \ldots, q-1$ (y todo p), entonces

$$f(\frac{p}{2^q}) = f(\frac{0+p/2^{q-1}}{2}) = \frac{f(0)+f(p/2^{q-1})}{2} = \frac{b+a(p/2^{q-1})+b}{2} = a\frac{p}{2^q} + b,$$

como queríamos verificar. Finalmente, supongamos por contradicción que $f(x_0) \neq ax_0 + b$ para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, digamos $f(x_0) > ax_0 + b$ (el otro caso es análogo). Escojamos p, q enteros, con $q \geq 0$, de modo que $p/2^q$ pertenezca al intervalo $]x_0, \frac{f(x_0)-b}{a}[$. Tenemos entonces

$$\frac{p}{2^q} < \frac{f(x_0)-b}{a},$$

es decir,

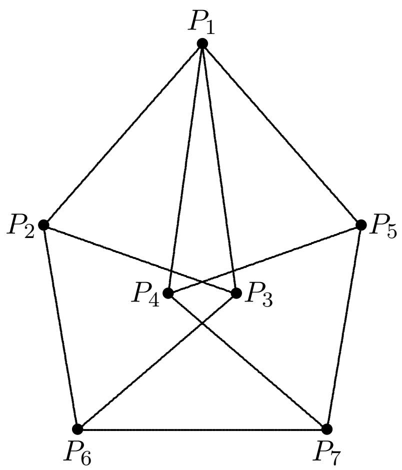
$$f(x_0) > a\frac{p}{2^q} + b = f(\frac{p}{2^q}).$$

Sin embargo, como $p/2^q > x_0$, esto contradice el hecho que f es estrictamente creciente.

Problema 4, nivel mayor.

Observe la figura abajo, donde todos los segmentos trazados tienen largo 1 (es fácil comprobar la existencia de la figura con esta propiedad). Si de entre los puntos P_1, P_2 y P_3, dos llevan el mismo color, entonces tenemos dos puntos del mismo color a distancia 1. Supongamos que sus colores sean diferentes. Si el color de P_6 coincide con el P_2 o el de P_3, entonces nuevamente tenemos dos puntos a distancia 1 del mismo color. Si no, P_1 y P_6 tienen el mismo color.

Razonando análogamente a la derecha de la figura, vemos que el único caso conclictivo se presenta cuando los colores de P_1, P_4 y P_5 son diferentes, y el primero de ellos coincide con el de P_7. Sin embargo, en este caso los puntos P_6 y P_7 tienen el mismo color y están a distancia 1, completando así la demostración.



Problema 6, nivel mayor.

Sea p un polinomio no nulo con coeficientes enteros. Se verifica fácilmente que existen polinomios de coeficientes enteros q y r tales que $p(\pi + \sqrt{2}) = \sqrt{2}q(\pi) + r(\pi)$. Si $\pi + \sqrt{2}$ es raíz de p entonces $0 = \sqrt{2}q(\pi) + r(\pi)$, por lo que

$$r^2(\pi) - 2q^2(\pi) = 0.$$

Si probamos que $r^2 - 2q^2$ no es un polinomio trivial, entonces tendríamos una contradicción al hecho que π es trascendente. Supongamos que r^2 y $2q^2$ fuesen iguales, y denotemos por n el menor grado para el cual ya sea el coeficiente de r^2 o de q^2 es no nulo. Si denotamos por c y $\overline{c}$ los coeficientes de los términos de grado n de r^2 y q^2 respectivamente, entonces

$$c^2 \quad = \quad 2\overline{c}^2.$$

Sin embargo, esta igualdad es imposible, pues la mayor potencia de 2 que divide a c^2 (resp. $2\overline{c}^2$) es par (resp. impar).