Prueba clasificatoria - PAUTAS
Olimpiada Nacional de Matemáticas Chile 2008

Primera prueba Nivel menor

Problema 1. Se tienen 680 naranjas apiladas en una pirámide triangular. ¿Cuántas naranjas hay en la base de la pirámide?

Sol. En un triangulo equilátero con n naranjas en su lado, se tienen:

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

naranjas. Es decir, en la base hay $\frac{n(n+1)}{2}$ naranjas. Cada nivel de la pirámide es un triangulo equilatero con una naranja menos en su lado que el nivel inferior, y por tanto, en la piramide hay:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

naranjas. Ahora sólo debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680$$

para lo cual encontramos las raices enteras del polinomio:

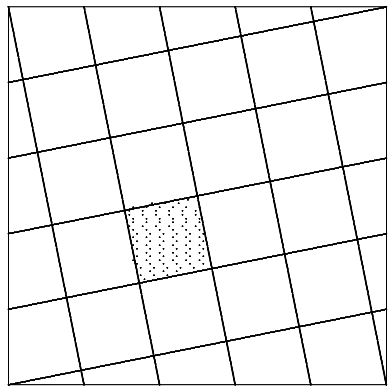
$$x^3 + 3x^2 + 2x - 4080 = 0$$

obteniendose $x = 15$. Se demuestra que las otras dos raices son complejas.Finalmente, concluimos que en la base hay:

$$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=15} = 120$$

, es decir, 120 naranjas.

Problema 2. En cada lado de un cuadrado de lado 5cm se marcan cuatro puntos de modo de subdividir cada lado en cinco partes iguales, y se unen como en la figura. ¿Cuál es el área de la región achurada?



Sol. Primero, notemos que en la figura hay 4×4 regiones iguales a la achurada y *completas*, además de algunos pedazos que tocan al borde del cuadrado. Veamos que con estos pedazos podemos armar otras regiones iguales a la achurada lo que nos permitirá calcular el área de una de ellas, calculando cuántas regiones caben en el cuadrado. Concentrémosnos en un solo lado (el de abajo).

El triángulo pequeño de la izquierda es exáctamente la pieza que le falta al trapecio de más a la derecha para completar una región. El segundo trapecio es también lo que le falta al cuarto para completar una región. Nos sobra la pieza del centro que es una mitad de una región. De esta manera, cada borde aporta con $2 + \frac{1}{2}$ regiones.

En el total del cuadrado caben entonces $4 \times 4 + 4(2 + \frac{1}{2}) = 26$ regiones iguales. Luego el área de una de ellas es $\frac{25}{26}$.

Problema 3. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es dividido en n partes (disjuntas y) no vacías $A_1, \ldots, A_n$ que verifican la siguiente propiedad: si a y b pertencen a A_i entonces su suma $a+b$ pertence al mismo conjunto A_i. Determine los posibles valores del entero positivo n.

Sol.

Existen descomposiciones para $n = 1, 2, 3$:

– para $n = 1$, basta tomar $A_1 = \mathbb{Z}$ (1 punto)

– para $n = 2$, tomar por ejemplo $A_1 = \{n \geq 0\}$ y $A_2 = \{n < 0\}$ (1 punto)

– para $n = 3$, tomar $A_1 = \{n > 0\}$, $A_2 = \{n < 0\}$ y $A_3 = \{0\}$ (1 punto)

– Observar que 1 debe pertenecer a algún A_i (1 punto)

– Si 1 pertenece a A_i entonces todos los enteros positivos están en dicho A_i (2 puntos)

– Observar que -1 debe pertenecer a algún A_j, y dicho conjunto A_j debe contener a todos los números enteros negativos (2 puntos)

– Concluir de lo anterior que n no puede ser mayor que 3 (2 puntos)

Segunda prueba Nivel menor

Problema 4. Encuentre todos los enteros positivos a, b tales que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 2.$$

Sol. La ecuación equivale a

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{b+1}{b}\right) &= 2\\ ab+a+b+1 &= 2ab\\ a+b+1 &= ab.\end{aligned}$$

Supongamos que $a = b$. La ecuación se reduce a $2a + 1 = a^2$, que no tiene soluciones enteras pues el lado izquierdo no es un múltiplo de a. Luego podemo suponer que $a > b \leq 1$. Luego

$$\begin{aligned}ab = a+b+1 &\leq 2a\\ b &\leq 2.\end{aligned}$$

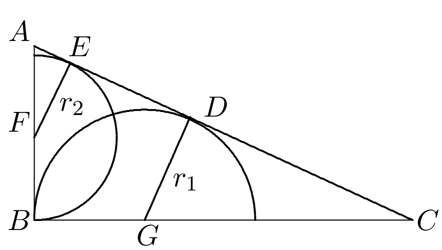
Tenemos así dos casos:

$b = 1$: La ecuación se reduce a $a + 2 = a$ lo cual es imposible.

$b = 2$: La ecuación se reduce a $a + 3 = 2a$ lo que implica que $a = 3$.

Por la simetría del problema, concluimos finalmente que las únicas soluciones son los pares $(2, 3)$ y $(3, 2)$.

Problema 5. Se tiene un triángulo rectángulo de catetos 5cm y 12cm. Con centro en cada cateto se construye una circunferencia que pasa por el vértice del ángulo recto y es tangente a la hipotenusa (vea la figura). Calcule la razón entre los radios de ambas circunferencias.



$$\frac{r_2}{r_1} = ?$$

Sol. Sean los puntos como en la figura (centros y tangencias respectivamente). Se tiene que $AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$. El $\triangle GDC$ es rectángulo en D y $\angle DCG = \angle ACB$, luego los $\triangle ABC$ y $\triangle GDC$ son semejantes. Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{DG}{GC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{r_1}{12 - r_1} &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

lo que implica a su vez que $r_1 = \frac{10}{3}$.

De manera análoga los $\triangle ABC$ y $\triangle FEA$ son semejantes y un cálculo similar nos da $r_2 = \frac{12}{5}$. Luego la razón buscada es

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{18}{25}.$$

Problema 6. En cada casilla de un tablero 7×7 hay una ampolleta. Además, se cuenta con 14 interruptores. Para cada fila existe un iterruptor que, al ser presionado, cambia el estado de las ampolletas de dicha fila (las que estaban encendidas se apagan, y las que estaban apagadas se encienden). Para cada columna se cuenta también con un interruptor que cambia el estado de las ampolletas en ella. Usando estos interruptores, ¿es siempre posible llegar, a partir de cualquier estado incial, a un estado en el cual el número de ampolletas encendidas en cada fila o columna es menor o igual al de ampolletas apagadas en dicha fila o columna?

Sol. Como hay una cantidad finita de ampolletas, hay también una cantidad finita de configuraciones posibles de ampolletas encendidas y apagadas. Esto nos dice también que hay una cantidad finita de configuraciones a las que podemos acceder por medio de una secuencia de acciones sobre los interruptores. De entre todas estas últimas configuraciones, consideremos aquella que tenga la menor cantidad de ampolletas encendidas. Aseguramos que esta configuración cumple con lo pedido en el problema. Efectivamente, supongamos que esta configuración tenga una fila (o columna) en la cual hayan más ampolletas encencidas que apagadas. Si apretamos el interruptor correspondiente a esta fila (o columna), las ampolletas de esa fila (o columna) que estaban encendidas pasan a estar a pagadas y las que estaban apagadas pasan a estar encendidas. Conseguimos de esta forma una configuración accesible por medio de acciones sobre los interruptores y que tiene en total menos ampolletas encendidas que la anterior, lo cual es imposible pues la anterior era aquella configuración que tenía la menor cantidad de ampolletas encendidas. Esto quiere decir que esa configuración verificaba lo pedido por el problema.

Primera prueba Nivel mayor

Problema 1. Se tienen 680 naranjas apiladas en una pirámide triangular. ¿Cuántas naranjas hay en la base de la pirámide?

Sol. En un triangulo equilátero con n naranjas en su lado, se tienen:

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

naranjas. Es decir, en la base hay $\frac{n(n+1)}{2}$ naranjas. Cada nivel de la pirámide es un triangulo equilatero con una naranja menos en su lado que el nivel inferior, y por tanto, en la piramide hay:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

naranjas. Ahora sólo debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680$$

para lo cual encontramos las raices enteras del polinomio:

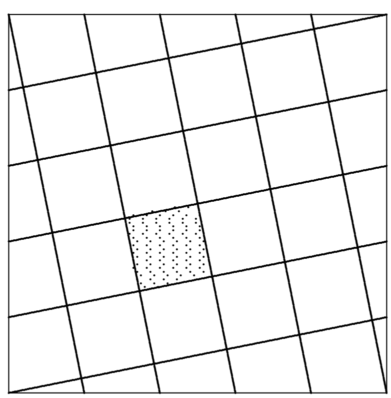
$$x^3 + 3x^2 + 2x - 4080 = 0$$

obteniendose $x = 15$. Se demuestra que las otras dos raices son complejas.Finalmente, concluimos que en la base hay:

$$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=15} = 120$$

, es decir, 120 naranjas.

Problema 2. En cada lado de un cuadrado de lado n se marcan n-1 puntos de modo de subdividir cada lado en n partes iguales, y se unen como en la figura. ¿Cuál es el área de la región achurada?



Sol. Primero, notemos que en la figura hay $n-1 \times n-1$ regiones iguales a la achurada y *completas*, además de algunos pedazos que tocan al borde del cuadrado. Veamos que con estos pedazos podemos armar otras regiones iguales a la achurada lo que nos permitirá calcular el área de una de ellas, calculando cuántas regiones caben en el cuadrado. Concentrémosnos en un solo lado (el de abajo). Este lado es tocado por n piezas. Separemos el análisis según la paridad de n:

Si n es par: La pieza 1 junto con la pieza n forman una región completa.

La pieza 2 con la pieza $n-1$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza i con la pieza $n+1-i$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza $\frac{n}{2}$ con la pieza $\frac{n}{2}+1$ forman una región completa.

Entonces, cada borde aporta con $\frac{n}{2}$ regiones completas. Luego el cuadrado admite

$$(n-1) \times (n-1) + 4\frac{n}{2} = n^2 - 2n + 1 + 2n = n^2 + 1$$

regiones completas.

Si n es impar: La pieza 1 junto con la pieza n forman una región completa.

La pieza 2 con la pieza $n-1$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza i con la pieza $n+1-i$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza $\frac{n-1}{2}$ con la pieza $n+1-\frac{n-1}{2} = \frac{n+3}{2}$ forman una región completa.

Sobra la pieza $\frac{n+1}{2}$ que es exactamente la mitad de una región completa.

Entonces, cada borde aporta con $\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}$ regiones completas. Luego el cuadrado admite

$$(n-1) \times (n-1) + 4\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 2 = n^2 + 1$$

regiones completas.

En ambos casos el cuadrado admite n^2+1 regiones completas e iguales. Lego el área de una de ellas es

$$\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Problema 3. El conjunto $\mathbb{Z}^2$ es dividido en n partes (disjuntas y) no vacías $A_1, \ldots, A_n$ que verifican la siguiente propiedad: si a y b pertencen a A_i entonces su suma $a+b$ pertence al mismo conjunto A_i. Determine los posibles valores del entero positivo n.

Observación: recuerde que la suma de $a=(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ y $b=(m',n')\in\mathbb{Z}^2$ es definida como $(m+m',n+n')$.

Sol. Encontrar soluciones para valores particulares de n (pueden acumular hasta 5 puntos con esto):

Para $n=1$ tomar $A_1=\mathbb{Z}^2$ (1 punto)

Para $n=2$ tomar $A_1=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n\geq 0\}$ y $A_2=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n<0\}$ (1 punto)

Para $n=3$ tomar por ejemplo $A_1=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:n>0\}$, $A_2=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:n<0\}$ y $A_3=\{(m,0)\colon m\in\mathbb{Z}\}$ (1 punto)

Para $n=4$ tomar $A_1=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n>0\}$, $A_2=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n<0\}$, $A_3=\{(m,0)\colon m>0\}$ y $A_4=\{(m,0)\colon m\leq 0\}$ (1 punto)

Para $n=5$ tomar $A_1=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n>0\}$, $A_2=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\colon n<0\}$, $A_3=\{(m,0)\colon m>0\}$, $A_4=\{(m,0)\colon m<0\}$ y $A_5=\{(0,0)\}$ (1 punto)

Construir al menos un ejemplo de una partición en que uno de los subconjuntos sea un cono con vértice en el origen (3 puntos)

Probar que cualquier cono con vértice en el origen satisface la propiedad pedida para los conjuntos A_i (1 punto)

Usando descomposiciones en conos, concluir que n puede tomar cualquier valor positivo (1 punto)

Segunda prueba Nivel mayor

Problema 4. Se definen las sucesiones x_n, y_n mediante las reglas: $x_0 = 2, x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$, $y_0 = 3, y_1 = 4, y_{n+1} = y_n + 2y_{n-1}$. Pruebe que los conjuntos $\{x_n : n \geq 0\}$ y $\{y_n : n \geq 0\}$ son disjuntos.

Sol. Estudiemos los restos que aparecen al dividir por 7 los términos de las secuencias (en otras palabras, estudiemos el problema con congruencias módulo 7):

$$x_2 \equiv x_1 + 2x_0 \equiv 5 + 2 \cdot 2 \equiv 2 mod(7),$$

$$x_3 \equiv 2 + 2 \cdot 5 \equiv 5 mod(7).$$

Como los restos módulo 7 de los términos que siguen sólo dependen de los restos de los dos términos anteriores, concluimos que la secuancia $\{x_n\}$ tiene el siguiente comportamiento periódio en sus restos: $2, 5, 2, 5, 2, 5, \ldots$

De manera análoga la secuencia $\{y_n\}$ verifica

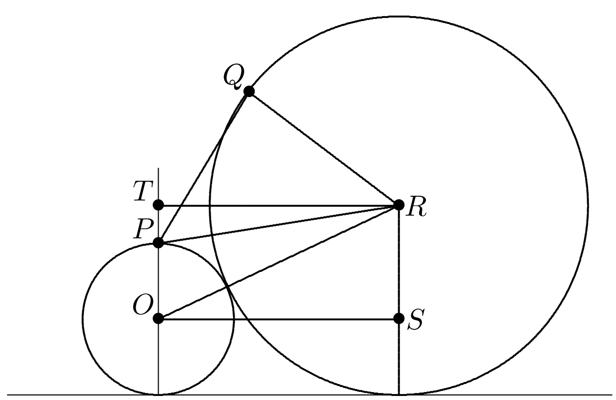
$$y_2 \equiv y_1 + 2y_0 \equiv 4 + 2 \cdot 3 \equiv 3 mod(7),$$

$$y_3 \equiv 3 + 2 \cdot 4 \equiv 4 mod(7).$$

Luego, concluimos que la secuencia $\{y_n\}$ tiene el siguiente comportamiento periódio en sus restos: $3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$

Vemos de esta forma que un número entero no puede pertenecer simultáneamente a ambas secuancias (de números enteros) pues su resto al dividir por 7 no puede ser a la vez 3 o 4 y 2 o 5.

Problema 5. Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes (externamente) entre sí y tangentes a una recta L (por el mismo lado). Desde el punto P de mayor altura (respecto a L) en C_1 se traza la tangente "superior" PQ a C_2: vea la figura. Pruebe que la longitud de PQ es igual al diámetro de C_1.



Sol. Llamemos r_1 y r_2 a los radios de C_1 y C_2 respectivamente. Apliquemos Pitágoras al $\triangle OSR$:

$$OS^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2. \tag{1}$$

Apliquemos Pitágoras al $\triangle PTR$:

$$TR^2 + (r_2 - 2r_1)^2 = PR^2. \tag{2}$$

Apliquemos Pitágoras al $\triangle RQP$:

$$PQ^2 + r_2^2 = PR^2. \tag{3}$$

Usando que $OS = TR$, y haciendo $(1) - (2) + (3)$ obtenemos

$$(r_2 - r_1)^2 - (r_2 - 2r_1)^2 + PQ^2 + r_2^2 = (r_2 + r_1)^2$$

lo que luego de las simplificaciones evidentes conduce a

$$PQ^2 = 4r_1^2.$$

Problema 6. En cada casilla de un tablero $n \times n$ se tiene una ampolleta. Además, se cuenta con $2n$ interruptores. Para cada fila existe un iterruptor que, al ser presionado, cambia el estado de las ampolletas de dicha fila (las que estaban encendidas se apagan, y las que estaban apagadas se encienden). Para cada columna se cuenta también con un interruptor que cambia el estado de las ampolletas en ella. Usando estos interruptores, ¿es siempre posible llegar, a partir de cualquier estado incial, a un estado en el cual el número de ampolletas encendidas en cada fila o columna es menor o igual al de ampolletas apagadas en dicha fila o columna?

Sol. Como hay una cantidad finita de ampolletas, hay también una cantidad finita de configuraciones posibles de ampolletas encendidas y apagadas. Esto nos dice también que hay una cantidad finita de configuraciones a las que podemos acceder por medio de una secuencia de acciones sobre los interruptores. De entre todas estas últimas configuraciones, consideremos aquella que tenga la menor cantidad de ampolletas encendidas. Aseguramos que esta configuración cumple con lo pedido en el problema. Efectivamente, supongamos que esta configuración tenga una fila (o columna) en la cual hayan más ampolletas encencidas que apagadas. Si apretamos el interruptor correspondiente a esta fila (o columna), las ampolletas de esa fila (o columna) que estaban encendidas pasan a estar a pagadas y las que estaban apagadas pasan a estar encendidas. Conseguimos de esta forma una configuración accesible por medio de acciones sobre los interruptores y que tiene en total menos ampolletas encendidas que la anterior, lo cual es imposible pues la anterior era aquella configuración que tenía la menor cantidad de ampolletas encendidas. Esto quiere decir que esa configuración verificaba lo pedido por el problema.