

XXIX Olimpiada Nacional de Matemática 2017

Nivel Menor

PROBLEMA 1

En el interior de un rectángulo se marca un punto P. Se trazan segmentos que unen los vértices con P. En forma alternada se colorean los sectores que se forman. Demuestre que la suma de las áreas de los sectores pintados, es igual a la suma de los sectores sin pintar.

PROBLEMA 2

Determine el menor número entero n de tal forma que la representación decimal de $15 \cdot n$ tenga sólo 0 y 2.

PROBLEMA 3

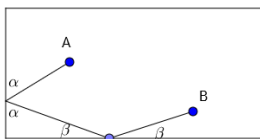
Encuentre todas las funciones $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con la propiedad de que para todo par de números enteros x, y se cumple la ecuación

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

PROBLEMA 4

Calcule la cantidad máxima de caminos distintos que se pueden construir en una mesa de billar para unir dos bolas con un tiro a tres bandas. Ninguna bola está tocando una banda.

Se define una banda al rebote de una bola en un lado de la mesa, con el ángulo de incidencia igual al ángulo de salida. Un camino en dos bandas se muestra en la siguiente figura:



Tiempo: 3 horas

XXIX Olimpiada Nacional de Matemática 2017

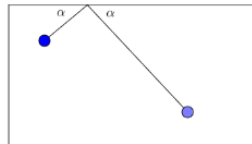
Nivel Mayor

PROBLEMA 1

En el interior de un hexágono regular se marca un punto P . Desde el punto se trazan segmentos hasta los vértices y luego se colorean de azul en forma alternada, los sectores que se obtienen. Demuestre que la suma de las áreas de los sectores pintados, es igual a la suma de los sectores sin pintar.

PROBLEMA 2

Calcule la cantidad máxima de caminos distintos que se pueden construir en una mesa de billar para unir dos bolas en la mesa a n bandas. Ninguna bola está tocando una banda. Se define una banda al rebote de una bola en un lado de la mesa, con el ángulo de incidencia igual al ángulo de salida.



PROBLEMA 3

Utilizando sólo dos dígitos distintos 2 y d , se forma el siguiente número de 90 cifras:

$$m = 2d22d222d \dots \text{Si } m \text{ es múltiplo de 9, determinar todos los valores posibles del dígito } d.$$

PROBLEMA 4

Calcule todas las soluciones x, y, z en los números reales positivos del siguiente sistema:

$$x(6 - y) = 9 \quad , \quad y(6 - z) = 9 \quad , \quad z(6 - x) = 9 \quad .$$

Tiempo: 3 horas