PRUEBA DE CLASIFICACION

equipo Chileno para la IMO 2009
Martes 26 de Mayo

Problema 1. Considere $n \geq 3$ puntos en el plano. Cada par de puntos es unido por un segmento. Sea d la longitud del mayor de estos segmentos. Decimos que un segmento de entre los definidos antes es un diámetro si su longitud es exactamente d. Demuestre que existen como máximo n diámetros. Muestre ejemplos de configuraciones de n puntos en los que existan exáctamente n diámetros.

Problema 2. Supongamos que h es la longitud de la altura máxima de un triángulo no obtusángulo. Sean R y r respectivamente los radios de las circunferencias circuncrita e inscrita . Demostrar que $R + r \leq h$.

Problema 3. Decimos que un cuádruple de enteros positivos es *primitivo* si al menos dos de sus elementos son primos relativos (es decir, no tienen factores primos comunes).

(i) Encuentre todos los cuádruples primitivos (a, b, c, d) tales que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{y} \qquad a + b + c = d.$$

(ii) Pruebe que para todos los cuádruples primitivos (a, b, c, d) satisfaciendo estas dos propiedades se tiene

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Tiempo: 3.5 horas.