Soluciones oficiales de los problemas de la Clasificación Olimpiada Nacional 2009

Comisión Académica

1 Nivel Menor

Problema 1.

Problema 2. <u>Solución 1</u>

Considere el hexágono formado por los puntos medios de las aristas que se ven en la figura anterior. Este exágono contiene a los puntos A, B y C y es plano, luego es la sección pedida. Además podemos afirmar que el polígono de corte es un hexágono regular. En efecto dado que sus lados unen puntos medios de cada cara del cubo cada uno mide $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Por lo anterior todos los lados son congruentes. Si consideramos dos ángulos cualquiera por ejemplo CFB y DAE notar que los triángulos respectivos son congruentes por el criterio LLL y luego estos ángulos miden lo mismo y son congruentes.

Finalmente el área del hexágono regular es

$$\frac{6}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Solución 2

Utilizar coordenadas y geometría analítica con un sistema coordenado 3D ubicado en una de las esquinas del cubo.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5. SOL1: Sumando las ecuaciones se obtiene:

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 + (2s-1)^2 + (2t-1)^2 = -15$$

pero la suma de 5 numeros no negativos no puede ser negativa, luego no existen soluciones reales.

SOL2: restando primera y segunda ecuacion tenemos: $s^2 - t^2 = 4(t-s)$ de manera que $s = t$ o bien $s + t = -4$. Lo segundo es imposible pues de las ecuaciones se deduce que los valores de las variables son al menos 1, pues una suma de cuadrados es no negativa. Analogamente todas las variables son iguales y se obtiene de cualquier ecuacion que

$$s^2 = s - 1.$$

Como $s \geq 1$, se tiene que $s^2 \geq s > s - 1$ y la igualad de arriba no puede ocurrir en los reales.

Problema 6.

El mayor número de personas que pueden ponerse de pie es 26 = 30 - 4.

1 punto por conjeturar esto

Esto sucede por ejemplo si los representantes de un continente (digamos América) se sientan uno al lado del otro, y luego los de África y Asia lo hacen de manera alternada.

hasta 2 puntos por configuración bien explicada

Para probar que no se pondrán de pie al menos 4 personas, razonamos como sigue. En lo que sigue, una frase del tipo "X está entre Y y Z" será entendida con la orientación contraria a la de las manecillas del reloj. Usaremos las letras A, B y C para denotar continentes.

Primeramente, debe haber dos representantes consecutivos de A entre quienes hay al menos dos participantes (donde "consecutivos" significa que entre ellos no hay otro representante del mismo continente A). En efecto, en caso contrario la suma de los representantes de B y C sería igual a 10, lo cual es absurdo.

1 punto.

Consideremos dos representantes X_A e Y_A de A con esta propiedad. Claramente, el participante siguiente a X_A, así como el anterior a Y_A, no se pondrán de pie. Sabemos entonces que hay al menos dos participantes que se quedan sentados.

1 punto

Análogamente, entre los correspondientes X_B e Y_B, al igual que entre X_C e Y_C, hay dos participantes que se quedan sentados, a saber, aquéllos que son contiguos a dichos puntos.

Si X_B, Y_B están ambos entre X_A e Y_A, de lo anterior se deduce la existencia de al menos 4 participantes que no se ponen de pie. Lo mismo ocurre si X_A, Y_A están ambos entre X_B e Y_B, etc.

1 punto

Supongamos ahora que X_B está entre X_A e Y_A (el caso en que X_A está entre X_B e Y_B) es análogo. De lo discutido más arriba concluimos que se quedan sentados el participante siguiente a X_A y el anterior a Y_B. Tampoco se paran el anterior a Y_A y el siguiente a X_B, por lo que sólo resta considerar el caso en que estos últimos coinciden. Supongamos que éste sea el caso.

Si Y_B no es inmediatamente anterior a X_A, entonces entre ellos habrá un participante que se quedará sentado, completando así los 4.

1 punto

Si Y_B es inmediatamente anterior a X_A, consideramos los puntos X_C, Y_C.

Si ambos están entre Y_B e Y_A, entonces están entre X_A y X_B, por lo que entre ellos hay otros dos participantes que no se pondrán de pie.

1 punto.

Si ambos están entre Y_A e Y_B, entonces entre ellos hay otros dos participantes que no se pondrán de pie, de los cuales al menos uno será diferente de los tres anteriores. Lo mismo ocurre si X_C está entre Y_B e Y_A, e Y_C está entre Y_A e Y_B.

1 punto.

Finalmente, si X_C está entre Y_A e Y_B, e Y_C está entre Y_B e Y_A, debe haber un cuarto participante entre Y_A y X_C que se queda sentado.

1 punto.

2 Nivel Mayor

Problema 1.

Problema 2. Solución 1

Considere el hexágono formado por los puntos medios de las aristas que se ven en la figura anterior. Este exágono contiene a los puntos A, B y C y es plano, luego es la sección pedida. Además podemos afirmar que el polígono de corte es un hexágono regular. En efecto dado que sus lados unen puntos medios de cada cara del cubo cada uno mide $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Por lo anterior todos los lados son congruentes. Si consideramos dos ángulos cualquiera por ejemplo CFB y DAE notar que los triángulos respectivos son congruentes por el criterio LLL y luego estos ángulos miden lo mismo y son congruentes.

Finalmente el área del hexágono regular es

$$\frac{6}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Solución 2

Utilizar coordenadas y geometría analítica con un sistema coordenado 3D ubicado en una de las esquinas del cubo.

Problema 3.

Solución 1

Primero hay que notar que es suficiente probar la propiedad para números positivos x e y, dado que estos suman más que si consideramos valores negativos o cero en algunas de las variables.

La idea de esta solución es notar que si $a > 0$ la expresión $\dfrac{y}{a^2 + y^2}$ como función de y es menor o igual a $\dfrac{1}{2a}$, hecho que se deduce directamente de la identidad $y^2 + a^2 \geq 2ay$.

Utilizando lo anterior

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Ahora $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ y claramente $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} < \dfrac{1}{2}$ luego

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} < 1.$$

<u>Solución 2</u>

La idea de esta solución geométrica es cambiar los valores de las variables por ángulos. Primero hay que notar que es suficiente probar la propiedad para números positivos x e y, dado que estos suman más que si consideramos valores negativos o cero en algunas de las variables.

$$A = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{y}\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)^2$$

Luego poniéndolo en términos de identidades trigonométricas:

$$A = \cot(\alpha)\sin^2(\alpha) + \cos(\alpha)\cot(\beta)\sin^2(\beta) = \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\beta)$$

luego

$$A = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \frac{1}{2}\sin(2\beta)\cos(\alpha) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Es estricta pues $\cos(\alpha) < 1$.

Problema 4.

Solución 1. Sea k la cantidad de ángulos interiores que son mayores o iguales que 180 grados. La suma total de los angulos interiores del poligono es $(n-2)180$, luego debe tenerse que

$$(n-2)180 > k180$$

de donde

$$n - k > 2.$$

Concluimos asi que la cantidad de angulos interiores que son menores que 180 grados es mayor que 2.

Pauta de correcion: Este argumento vale 10 puntos solo si se presenta una demostracion sobre la formula para la suma de angulos interiores de un poligono de n lados. Ademas se requiere que tal demostracion no use el hecho de que existen angulos interiores menores que 180 grados. Por ejemplo, la demostracion clasica por induccion sobre el numero de lados y que usa un recorte triangular no es valida. Frente a la falta de una tal demostracion solo se asignaran 7 puntos.

Una posible demostracion de la formula de la suma de angulos interiores que si es valida es la siguiente:

Lema 2.1. La suma de los angulos exteriores (con signo) de un poligono de n lados es 360 grados.

Demostracion: Los angulos exteriores con signo representan los cambios de direccion que sufren los lados al llegar a cada vertice. Como se trata de una figura cerrada, el cambio total es el correspondiente a una vuelta, es decir, 360 grados.

En cada vertice la suma del angulo interior mas el angulo exterior con signo es 180 grados. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{vertices} \alpha_{int} + \alpha_{ext} &= 180n \\ \sum_{vertices} \alpha_{int} + 360 &= 180n \end{aligned}$$

lo que permite concluir.

Solucion 2. Escojamos una cierta inclinacion que no es paralela a ningun lado del poligono, y, trasladando paralelamente, acerquemos al poligono una linea con esta inclinacion desde el infinito, digamos desde la derecha hacia la izquierda. Esta linea toca por primera vez al poligono en un cierto punto P_1. Como esta linea no es paralela a ningun lado, este punto P_1 es un vertice del poligono. El poligono esta ubicado completamente en el semiplano izquierdo determinado por esta linea, luego el angulo interior en P_1 es menor que 180 grados.

Con la misma inclinacion, acerquemos esta vez una linea desde la izquierda hacia la derecha hasta tocar por primera vez al poligono en un cierto punto P_2. Este punto debe ser un vertice y el poligono esta completamente contenido en el semiplano derecho determinado por la linea. Esto implica que los puntos P_1 y P_2 son diferentes (en caso contrario el poligono estaria contenido en una linea). El angulo interior en P_2 es menor que 180 grados.

Los puntos P_1, P_2 determinan una inclinacion. Con esta inclinacion, traslademos desde el infinito (digamos desde abajo hacia arriba) una linea hasta tocar por primera vez al poligono en un vertice P_3. Ahora hacemos lo mismo, pero desde arriba hacia abajo hasta tocar por primera vez un vertice P_4. Por un argumento analogo al caso de P_1, P_2, los puntos P_3 y P_4 son diferentes, y como la inclinacion de las dos ultimas lineas es la misma que la del segmento P_1P_2, el conjunto $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ tiene al menos 3 puntos diferentes. Hemos hallado asi un tercer vertice cuyo angulo interior es menor que 180 grados.

Pauta de correcion: Si usa la idea de aproximarse desde el infinito con algun objeto (linea, circulo, etc.) y muestra que el primer contacto se realiza en un vertice cuyo angulo es bueno, ya tiene 3 puntos. Si con este metodo consigue un segundo vertice bueno obtiene 3 puntos mas. El total del puntaje se asignara al hallar el tercer vertice.

Problema 5.

Problema 6. Por el algoritmo de la division existen naturales q y r, con $0 \leq r < n$ tales que $m = qn + r$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2^m - 1}{2^n - 1} &= \frac{2^{qn+r} - 1}{2^n - 1} \\ &= \frac{2^{qn+r} - 2^r + 2^r - 1}{2^n - 1} \\ &= 2^r \left(\frac{2^{qn} - 1}{2^n - 1} \right) + \frac{2^r - 1}{2^n - 1}. \end{aligned}$$

Usando la igualdad $(x^s - 1) = (x - 1)(x^{s-1} + x^{s-2} + \ldots + 1)$ deducimos que el primer termino de arriba es un entero. Como $r < n$, el segundo termino de arriba es menor que 1, luego la parte entera buscada es

$$2^r \left(\frac{2^{qn} - 1}{2^n - 1} \right) = 2^r (2^{q(n-1)} + 2^{q(n-2)} + \ldots + 1).$$

Este numero es par cuando $r = 0$ e impar en caso contrario. Deducimos entonces que la parte entera buscada es impar si y solamente si m es un multilpo de n.