Prueba de selección Equipo chilenos IMO-Ibero 2016

20 de Abril de 2016

Problema 1. Se tiene un triángulo equilátero de lado 20 subdividido mediante paralelas a los lados en $20^2 = 400$ triangulitos equiláteros de lado 1. Se debe colorear de rojo algunos segmentos de longitud 1 que sean lados de los triangulitos, de manera que ningún triangulito resulte con sus tres lados rojos. Determinar la máxima cantidad de segmentos de longitud 1 que se pueden colorear de rojo.

Problema 2. Hay 2016 puntos cerca de una recta de modo que la distancia entre cada punto y la recta es menor que 1 cm y la distancia entre dos puntos cualesquiera es siempre mayor que 2 cm. Demostrar que existen dos puntos cuya distancia es por lo menos 17 metros.

Problema 3. Decimos que un conjunto $\mathcal{A}$ de enteros es *admisible* si tiene la propiedad:

$$\text{Si } x,\, y \in \mathcal{A} \text{ entonces } x^2 + kxy + y^2 \in \mathcal{A} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

Determine todos los pares m, n de enteros no nulos tal que el único conjunto admisible conteniendo a m y n simultáneamente es el conjunto de todos los enteros.

Problema 4. Sean f y g dos polinomios no nulos con coeficientes enteros con $grado(f) > grado(g)$. Suponga que para infinitos primos p el polinomio $pf + g$ tiene una raíz racional. Pruebe que f tiene una raíz racional.

Aclaración: Una raíz racional de un polinomio f es un número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(q) = 0$.

Tiempo: 150 minutos.