XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Menor

Primera prueba Final, 20 de Octubre de 2016

Problema 1. Considere la secuencia de dígitos que se obtiene de escribir los números naturales consecutivos del 1 al 100000:

$$1234567891011121314\dots9999899999100000.$$

Determine cuántas veces aparece el bloque 2016 en esta secuencia.

Problema 2. Para un triángulo equilátero $\triangle ABC$, determine si existe o no, un punto P en el interior de $\triangle ABC$ de manera tal que toda línea recta que pasa por P divida al triángulo $\triangle ABC$ en dos líneas poligonales de igual longitud.

Problema 3. Sobre un tablero cuadriculado de 1000×1000, se colocan piezas de dominó (2×1 o 1×2), de manera tal que cada pieza de dominó cubre exactamente dos cuadrados del tablero. No se permite que dos piezas de dominó sean adyacentes, y se permite que se toquen en un vértice. Determine el número máximo de piezas de dominó que se pueden poner siguiendo estas reglas.

Tiempo: 3 horas.

XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Menor

Segunda prueba Final, 21 de Octubre de 2016

Problema 4. Se escribe el producto

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{2^{99}} \cdot \frac{100}{2^{100}}$$

en su forma simplificada al máximo. ¿Cuál es el último dígito del denominador?

Problema 5. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo e I el centro de la circunferencia inscrita. Si D es el punto del lado BC tal que OD es perpendicular a BI. Demuestre que ID es paralelo a AC.

Problema 6. Beto juega al siguiente solitario: inicialmente una máquina elige al azar 26 enteros positivos entre 1 y 2016, y los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos). En cada paso, Beto elige algunos de los números escritos en el pizarrón, y les resta a cada uno de ellos un mismo número entero no negativo k con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 26 números sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina y Beto gana. Determinar la menor cantidad de pasos que le garantizan a Beto la victoria, sin importar los 26 números que se elijan inicialmente.

Tiempo: 3 horas.

XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Mayor

Primera prueba Final, 20 de Octubre de 2016

Problema 1. El número natural a_n se obtiene de escribir juntos y ordenados, en notación decimal, todos los números naturales entre 1 y n. Así tenemos por ejemplo que

$$a_1 = 1,\ a_2 = 12,\ a_3 = 123,\ \ldots,\ a_{11} = 1234567891011,\ \ldots$$

Determine todos los valores de n para los cuales a_n no es divisible por 3.

Problema 2. Para un triángulo $\triangle ABC$, determine si existe o no, un punto P en el interior de $\triangle ABC$ de manera tal que toda línea recta que pasa por P divide al triángulo $\triangle ABC$ en dos polígonos de igual área.

Problema 3. La jirafa es una pieza de ajedrez que avanza 4 casillas en una dirección y luego una casilla en una dirección perpendicular. ¿Cual es el menor valor de n de manera tal que la jirafa que parte de una esquina en un tablero de $n \times n$ puede visitar todas las casillas de dicho tablero?

Tiempo: 3 horas.

XXVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA
Nivel Mayor

Segunda prueba Final, 21 de Octubre de 2016

Problema 4. Se escribe el producto

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{16}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{2^{99}}\cdot\frac{100}{2^{100}}$$

en su forma simplificada al máximo. ¿Cuál es el último dígito del denominador?

Problema 5. Determine todos los triples (x, y, z) de números reales no negativos que verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (z-1)^2, \\ y^2 - z &= (x-1)^2, \\ z^2 - x &= (y-1)^2. \end{aligned}$$

Problema 6. Sean P_1 y P_2 dos planos no paralelos en el espacio, y A un punto que no está en ninguno de ellos. Para cada punto X, denotemos X_1 su reflexión respecto a P_1, y X_2 su reflexión respecto a P_2. Determine el lugar geométrico de los puntos X para los cuales X_1, X_2 y A son colineales.

Tiempo: 3 horas.